内 容 简 介

本书主要介绍：函数芽在低余维下的分类与形变理论，除法定理与Malgrange预备定理，映射芽的开折理论，映射芽的有限决定性，Thom-Boardman奇点集，稳定映射芽的分类以及奇点理论在分歧问题研究中的应用.本书比较全面地阐述基本理论与方法，并反映近20年来奇点理论的某些发展，其中包括作者及国内研究者的部分工作，试图将读者引导到现代研究前沿.

读者对象：高等院校数学系高年级学生、研究生、大学教师及有关的科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

光滑映射的奇点理论/李养成著.—北京：科学出版社，2002.1
(现代数学基础丛书)
ISBN 7-03-009594-4

Ⅰ.光… Ⅱ.李… Ⅲ.映射(数学)－奇点理论 Ⅳ.O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第042759号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第一版 开本:850×1168 1/32
2002年1月第一次印刷 印张:13
印数:1—2 000 字数:336 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉)

序　言

奇点理论是分析学科中的一个新的分支,它是处在分析、微分拓扑、微分几何、交换代数与李群以及微分方程等数学学科交汇处的一门学问,又在诸多领域,如微分方程、振荡积分、动力系统、分歧理论、突变理论、几何光学与波动光学等学科中有广阔的应用.

E. Brieskorn 曾说:"在数学的许多领域以及许多应用中,都有反常现象,而'正常与反常'这一对矛盾则是数学里最常见的矛盾……".这里所谓的反常就是指某种奇异性,也就是奇点的实质背景.可以说奇异性具有普遍性,其实科学家早就观察到并认识到研究它们的重要性,但直到 20 世纪 50 年代 H. Whitney 做出开创性工作之前尚无人对此做过系统的研究,原因是当时数学的发展水平尚未能为其诞生提供思想和工具的准备.我们回顾一下奇点理论发展的历史进程,最早有 20 世纪 30 年代 H. M. Morse 的临界点理论,40 年代 H. Whitney 的与微分流形嵌入、浸入有关的奇点工作,以及 L. Pontryagin 与 H. Whitney 研究的与示性类有关的奇点工作.这一时期是个别成果积累与建立一般理论的酝酿阶段,也是奇点的萌芽时期.1955 年 H. Whitney 发表了关于把平面映到平面的映射奇点工作,它标志着奇点理论作为一门独立的数学分支登上了数学的舞台.1960 年 R. Thom 更进一步把奇点理论中的方法与结果纳入一个更为概括的理论框架中,经过 Thom 的提炼,奇点理论得到蓬勃的发展,出现了像 J. Mather, V. I. Arnold 等人的一系列重大成果和进展,至此呈现出一个繁荣的局面.因此把这一有发展前景的理论介绍给我国读者是一件很有意义的工作,而李养成教授这本著作也就应运而生.近二三十年来,国外在奇点理论方面陆续有几本著作面世,并各有其优点,但与国外的同类著作相比,本书有以下两个特点:

(1) 奇点理论发展至今其内容已如此丰富,因此在选材上就

必须周密考虑.本书选材适当,它既包含了近20年来发展迅速的一些重要论题(其中也含有作者本人的研究成果),而又不是盲目地追求全面,以免内容太多而增加读者的困难与负担,这样既能使读者较为方便地进入这个领域,并能较快地深入到这一领域的某些研究前沿,又可以适合于不同目的的读者的要求.

(2) 可读性强.奇点理论具有深厚的实际背景,但需借助现代数学工具,其研究的过程及结果的表达便显得相当的抽象,掩盖了它的具体背景,因此对读者来说在理解与掌握上都相当费时费力.而本书在处理重要概念与理论上,结合了许多具体的例子来讲述,使读者能透过形式化的表达方式,建立起直觉的感性认识,这是符合认识论的,无疑对读者在理解与掌握理论上会有极大的帮助.

由于本书具有上述特点,相信它对读者学习奇点理论会有很大的用处.我为它的出版而高兴,所以应李养成同志所约写下上面一些话(也是我读此书时的一点感想)作为序言.

李培信

2000年春于北京中关村

前　言

V. I. Arnold 在《突变理论》中指出:“在 Whitney 的奠基性工作之后,奇点理论发展迅猛,现在已成为数学的最重要领域之一.”面对奇点理论如此丰富的内容,本书着重于局部理论,试图从中选取十分有意义的重要内容予以介绍,其中包括近 20 年来部分研究专题. 下面简述本书的内容安排.

芽是奇点理论中最基本的概念. 第一章分别就函数芽、映射芽以及微分同胚芽做了介绍. 我们假定读者熟悉反函数定理,Taylor 公式和常微分方程的解的存在惟一性定理,由此可自然地建立芽的导网,局部微分同胚群的无穷小生成元(用向量场芽表达)以及具有常秩的映射芽的标准形式(即秩定理)等. 而通过对芽取有限导网运算,光滑函数芽环及光滑映射芽所成之模都变为有限维实向量空间,$\mathbb{R}^n$ 上的局部微分同胚群变为 Lie 群,这样有可能将无穷维问题化简为有限维来处理,这是奇点理论研究中一种重要手段. 本章还讨论了一类重要的函数芽即 Morse 芽,证明了 Morse 引理,并初步探讨光滑函数芽的分类. 第二章引入 R. Thom 的横截性概念,它是微分拓扑和奇点理论中的一个重要的基本概念. 横截性是正则性概念的延伸,我们在证明 Sard 定理之后,建立了各种形式的横截性定理,包括参数横截性定理,导网形式的横截性定理,并应用于 Thom 的一阶奇点集的讨论,为进一步学习 Thom-Boardman 奇点(见第十一章)做准备. 读者从 §2.5 中的一些结果可看出横截性这一工具的威力. 以上两章组成本书的预备知识.

第三章讨论余维数不大于 5 的函数芽的分类,给出了 Thom 分类定理,突变论中 7 种初等突变模型,它是奇点理论在 20 世纪 70 年代最重要的成果之一. 由于一个函数芽余维数有限等价于该函数芽关于右等价群 $\mathscr{R}$ 是有限决定的,这说明分类问题与函数芽的有限决定性有着密切的联系,因此在探讨函数芽在低余维下的

分类之前，我们讨论函数芽关于右等价群的有限决定性. 这样做还有助于读者更好地理解映射芽有限决定性的一般理论（见第十章）. 本书第四、五两章分别介绍除法定理与 Malgrange 预备定理. 对于一般的除法定理，首先证明它等价于多项式除法定理，然后采用 Nirenberg 方法证明多项式除法定理. 第五章我们从除法定理推导 Malgrange 预备定理. 事实上它们彼此是等价的，都表达了分析学中的一个深刻结果，但预备定理使用了更加代数化的语言来陈述. 须知 Malgrange 预备定理是奇点理论的一个非常有用的工具，曾被 Thom 誉为局部分析的四大支柱之一. 在第五章有一节介绍该定理的应用，以此为基础，第六章讨论函数芽的形变理论. 如果一个函数芽 f 存在通用形变，那么对 f 做扰动产生的每一个形变都可由 f 的通用形变导出，这说明研究通用形变是很有意义的. 本章的一个主要结果是通用形变定理，由它可推知函数芽 f 具有通用形变的充要条件是 f 具有有限余维，因而等价于它是有限 $\mathscr{R}$-决定的. 此外，通用形变还可用横截性来描述. 利用形变理论继续对 Thom 的初等突变模型讨论，可看出它为突变理论的发展提供了理论依据. 第七章介绍 Whitney 的著名工作，从平面到平面的光滑映射的奇点，证明了在一般状况下，这样的奇点只能是折叠或尖点.

第八章引入 J. N. Mather 提出的 5 类局部微分同胚群，讨论映射芽在这 5 类群（特别是左右等价群 $\mathscr{A}$ 和接触等价群 $\mathscr{K}$）作用下的切空间，为本书余下的几章做准备，这是因为映射芽的切空间的有关信息为研究映射芽本身提供了重要信息. 第九章介绍映射芽的开折理论，主要结果是两个通用性定理. 第一个对群 $\mathscr{A}$ 作用下的开折而言，称为 $\mathscr{A}$-通用开折定理，它曾被 Thom 猜测而由 Mather 所证明. 第二个则在接触等价意义下以形变的形式表达，叫做 $\mathscr{K}$-通用形变定理. 作为它的一个应用，§9.3 介绍了 B. Morin 研究过的一类高阶奇点. 第十章开展映射芽的有限决定性理论的讨论，这是自 20 世纪 70 年代以来非常活跃的研究课题. 本章不仅比较简洁地全面描述了 Mather 的基本结果，而且反映了在该理论

发展中的一些有代表性的研究成果，介绍了基本的研究方法与技巧，以便于读者较快地进入该研究领域. 第十一章讨论 Thom-Boardman 奇点，介绍了 Boardman 的基本理论. 证明了映射芽的 Boardman 符号是接触等价不变量，因而可应用于映射芽 $\mathscr{K}$-等价的判别. 并且对映射芽的开折而言，它也是一个不变量，从而为研究稳定映射芽的分类做准备. 第十二章在刻画了稳定映射芽的代数及几何特征后，证明了 Mather 关于稳定芽的基本分类定理，并且陈述了他关于稳定映射的一些深刻结果. Mather 对于稳定映射的一系列深入研究为奇点理论的发展做出了重要贡献. 为理解 Mather 的工作，本章给出了稳定芽分类的几个典型实例，并讨论了某些稳定映射可能出现的奇点类型. 第十三章讨论奇点在分歧理论中的应用，它是由 M. Golubitsky 和 D. G. Schaeffer 等所开创并且自 20 世纪 80 年代以来得到很大发展的研究领域. 本章讨论的对象是以紧致 Lie 群为对称群的分歧问题，因此本章开头两节介绍紧致 Lie 群的有关知识，接着讨论与紧致 Lie 群可交换的光滑映射芽. 在这一章中我们应用奇点理论方法与群论方法相结合研究静态分歧问题，主要考虑分歧问题的识别与开折两个方面，试图为读者继续深入研究创造条件.

本书力求用简明易懂的叙述方式，试图深入浅出地介绍基本概念与基本理论，以帮助读者掌握其要义，领悟基本思想与方法. 同时希望本书能反映近 20 年来奇点理论的某些发展，以便读者能较快地进入现代研究的某些领域. 本书包含了我国奇点理论工作者及作者本人的部分研究工作. 在内容编排上，本书兼顾到读者的不同需求. 全书可作为研究生教材，也可供大学教师和应用奇点理论的科技工作者阅读与参考. 本书前 7 章还可供大学数学系高年级本科生选修课使用. 阅读本书不要求读者具有奇点理论方面的初步知识，如果读者熟悉有关流形、李群及交换代数的初步知识则更方便. 对于初学者，某些命题(例如 Sard 定理，Nirenberg 扩张引理等)的证明亦可略去不读.

本书第四、五两章由李兵博士撰写初稿，他还阅读过书稿的若

干章节.提出许多改进意见.感谢他为本书付出的辛勤工作.

本人特邀请我的老师李培信教授为本书作序并担任本书主审.整个写作过程包括酝酿写作大纲到成书出版一直得到他的关心与指教.李先生审阅全部书稿提出不少宝贵意见.作者在此对李培信先生的关心、鼓励与指导表示最诚挚的感谢.

作者非常感谢姜伯驹、刘应明院士为推荐本书出版给予的有力支持,十分感谢沈信耀、虞言林、陆洪文、陈志华、杨向群和唐梓洲教授对本书的关心、支持与真诚帮助.感谢余建明、邹建成博士的热忱支持.由于作者学识有限,书中难免有谬误之处,热诚欢迎读者批评指正.

本书得到国家自然科学基金委员会基金项目的部分资助,还得到中南大学和湖南师范大学的资助.作者借此机会一并表示感谢.作者感谢科学出版社特别是吕虹编审的辛勤劳动.

李养成

2001年1月于中南大学

目　　录

第一章　芽与导网

讨论光滑映射的局部性质，自然地引入芽的概念. 本章前 3 节分别介绍函数芽、映射芽以及微分同胚芽的基本概念与基本性质. 读者将会发现书中有时用代数的语言来表达几何与分析性质. 而对芽取导网运算，将光滑函数芽(或映射芽)用它们的 Taylor 多项式(或 Taylor 多项式映射)来代替，有可能将无穷维问题简化为有限维来处理，这是奇点理论研究中一种重要手段. 第四节介绍 Morse 芽，初步探讨光滑函数芽的分类，可看做是前 3 节的应用.

§1.1　光滑函数芽环

如果两个函数在一点的某个邻域内相一致，那么它们在该邻域内具有相同性质. 我们在讨论函数的局部性质时，可以将它们归入同一类而不加区分. 因此对在某点附近有定义的一族函数分类进行研究自然导致函数芽的概念.

1.1.1　C^∞ 函数芽环

设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. n 元实值函数 $f: U\to\mathbb{R}$ 叫做无穷次可微的，如果对于 U 中的每一点 x，f 的各阶偏导数在点 x 都连续. U 上的无穷次可微函数又叫做光滑函数或 C^∞ 函数.

定义 1.1.1　C^∞ 函数在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽是 C^∞ 函数 $\tilde{f}: U\to\mathbb{R}$ (U 为点 0 的开邻域)的一个等价类，其等价关系规定如下：两个 C^∞ 函数 $\tilde{f}: U\to\mathbb{R}$ 和 $\tilde{g}: V\to\mathbb{R}$ 是等价的，当且仅当存在点 0 的开邻域 $W\subset U\cap V$，使得 $\tilde{f}\big|W=\tilde{g}\big|W$. 以上述 $\tilde{f}$(或 $\tilde{g}$)为代表的 C^∞ 函数芽记为 $f: (\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$. C^∞ 函数芽又叫做光滑函数芽.

将 C^∞ 函数在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽组成之集记为 $\varepsilon_{(\mathbb{R}^n,0)}$ 或简记为

ε_n. 我们可在 ε_n 中引入代数运算. 设 $f,g\in\varepsilon_n$, 取它们的代表 $\tilde{f}$: $U\to\mathbb{R}$, $\tilde{g}:V\to\mathbb{R}$. 按照函数的加法和乘法, 有

$$\tilde{f}+\tilde{g}:U\cap V\to\mathbb{R}, x\mapsto(\tilde{f}+\tilde{g})(x)=\tilde{f}(x)+\tilde{g}(x).$$

$$\tilde{f}\cdot\tilde{g}:U\cap V\to\mathbb{R}, x\mapsto(\tilde{f}\cdot\tilde{g})(x)=\tilde{f}(x)\cdot\tilde{g}(x).$$

然后取 $\tilde{f}+\tilde{g}$, $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽, 分别记为 $f+g$, $f\cdot g$, 叫做函数芽 f 与 g 的和与积.

容易验证 ε_n 对于加法与乘法做成一个具有单位元的可换环, 实际上它是一个实代数. 这是因为 $\mathbb{R}$ 本身是一个实数域, 并且 ε_n 中的加法、纯量乘法以及乘法是由 $\mathbb{R}$ 上的运算诱导出来的.

类似地可以定义 C^∞ 函数在任意点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽, 并记所有这样的芽组成之集为 $\varepsilon_{(\mathbb{R}^n,x_0)}$, 在该集中引入代数运算使它成为一个可换环.

本书中的函数芽指的是 C^∞ 函数芽, 若无其他声明的话.

1.1.2 极大理想及其幂

令 $\mathscr{M}_n=\{f\in\varepsilon_n\mid f(0)=0\}$, 易见 $\mathscr{M}_n\subset\varepsilon_n$ 是极大理想且 $\varepsilon_n/\mathscr{M}_n=\mathbb{R}$. 事实上, $\mathscr{M}_n$ 是 ε_n 中惟一的极大理想. 为证实这一点, 假设 $f\notin\mathscr{M}_n$, 则 $f(0)\neq0$, 因而它的任意一个代表 $\tilde{f}$ 在原点的某一邻域内的值不为 0, $1/\tilde{f}$ 在该邻域内有定义而且是 C^∞ 的, 这说明 f 是一个可逆芽并且不包含在 ε_n 的任何真理想中.

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标函数, 则 $\mathscr{M}_n$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成. 更一般地, 我们有下列结论.

定理 1.1.1 设 $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ 的坐标为 $(t_1,\cdots,t_k;x_1,\cdots,x_n)$, 简记为 (t,x). 令

$$\mathscr{I}=\{f:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}\mid f(t,0)=0, t\text{ 与 }0\in\mathbb{R}^k\text{ 相邻近}\}. \tag{1}$$

则 $\mathscr{I}$ 是 ε_{k+n} 中的理想, 由坐标函数芽 $x_1,\cdots,x_n$ 所生成. 于是

$$f\in\mathscr{I}\Leftrightarrow f=\sum_{i=1}^n x_i f_i, f_i\in\varepsilon_{k+n}, i=1,\cdots,n.$$

证 容易看出 $\mathscr{I}$ 是 ε_{k+n} 中的理想. 选取 $f\in\mathscr{I}$ 的一个代表 $\tilde{f}$: $U\times V\to\mathbb{R}$ 满足 $\tilde{f}\mid U\times\{0\}=0$, 其中 U 为 $\mathbb{R}^k$ 中原点的邻域, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中原点的凸邻域. 取 $(t,x)\in U\times V$, 连接点 $(t,0)$ 与点 (t,x) 的直线段 $\subset U\times V$, 且 $\tilde{f}(t,0)=0$. 由微积分中的牛顿-莱布尼兹公式, 有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t,x)&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{f}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^1\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\cdot x_i\right)\mathrm{d}\lambda\\&=\sum_{i=1}^n x_i\cdot\int_0^1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

令

$$\tilde{f}_i(t,x)=\int_0^1\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}(t,\lambda x)\mathrm{d}\lambda,$$

则 $\tilde{f}_i$ 是 C^∞ 函数, $i=1,\cdots,n$, 并且

$$\tilde{f}(t,x)=\sum_{i=1}^n x_i\tilde{f}_i(t,x),$$

取在 $0\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$ 处的芽, 得

$$f=\sum_{i=1}^n x_i f_i,\qquad f_i\in\varepsilon_{k+n}.$$

由此可知, $\mathscr{I}$ 由坐标函数芽 $x_1,\cdots,x_n$ 生成. 证毕.

注 将任意 $f\in\varepsilon_n$ 和由 $f'(t,x)=f(x)$ 所定义的 $f'\in\varepsilon_{k+n}$ 等同, 从而将 ε_n 等同于 ε_{k+n} 的一子环. 理想 $\mathscr{I}$ 可改写为 $\mathscr{M}_n\varepsilon_{k+n}$ 或 $\mathscr{M}_x\cdot\varepsilon_{t,x}$, (1)式则写为

$$\mathscr{M}_n\cdot\varepsilon_{k+n}=\{f\in\varepsilon_{k+n}\mid f\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0\}.\qquad(2)$$

现介绍本定理的一个应用. ε_n 的一个线性算子

$$X:\varepsilon_n \to \mathbb{R}$$

叫做求导算子,如果它满足莱布尼兹法则

$$X(f\cdot g) = X(f)\cdot g(0) + f(0)\cdot X(g),\quad f,g\in\varepsilon_n.$$

特别,$X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)+X(1)$.于是 $X(1)=0$.并且 $X(c)=0$,c 为常值函数芽.

容易验证 ε_n 的求导算子全体组成一个向量空间,记为 $T_0\mathbb{R}^n$,叫做$\mathbb{R}^n$ 在原点的切空间.进而有

定理 1.1.2 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0:\varepsilon_n\to\mathbb{R}, f\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0)(i=1,\cdots,n)$为向量空间 $T_0\mathbb{R}^n$ 的一组基.

证 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0$ 是 ε_n 的求导算子($i=1,\cdots,n$).为证它们是 $T_0\mathbb{R}^n$ 的基,首先说明它们是线性无关的.设

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0 = 0,\qquad \lambda_i\in\mathbb{R}.$$

将它作用于坐标函数芽 x_j,得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_0 = \lambda_j = 0,\qquad j=1,\cdots,n.$$

其次说明$\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_0\right\}$是生成集.设 X 是 ε_n 的任意一个求导算子且 $X(x_i)=\mu_i(i=1,\cdots,n)$,则

$$Y = X - \sum_{i=1}^{n}\mu_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0$$

也是求导算子且 $Y(x_i)=0$.任取 $f\in\varepsilon_n$,据定理 1.1.1,有

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^{n}x_if_i,\quad f_i\in\varepsilon_n,$$

因此

$$Y(f) = Y(f(0)) + \sum_{i=1}^{n} Y(x_i f_i)$$

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n} Y(x_i) \cdot f_i(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i(0) \cdot Y(f_i)$$

$$= 0,$$

于是 $X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_0$，证毕.

为讨论方便起见，引入下列记号：设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中 α_i 为非负整数，记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad 0! = 1,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f, \qquad |\alpha| = D^\alpha \text{ 的阶数}.$$

对于 $(\lambda, \alpha) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中 λ_i, α_i 为非负整数，记

$$(t, x)^{\lambda, \alpha} = t_1^{\lambda_1} \cdots t_k^{\lambda_k} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^{\lambda, \alpha} f = \frac{\partial^{|\lambda| + |\alpha|}}{\partial t_1^{\lambda_1} \cdots \partial t_k^{\lambda_k} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

定理 1.1.3 设 ε_{k+n} 中理想 $\mathscr{M}_n \cdot \varepsilon_{k+n}$ 如定理 1.1.1 中所述，$r \geqslant 1$，则

$$\mathscr{M}_n^r \cdot \varepsilon_{k+n} = \{ f \in \varepsilon_{k+n} \mid D^{\lambda, \alpha} f | \mathbb{R}^k \times \{0\} = 0$$

$$\text{对所有 } \lambda \text{ 及所有 } \alpha, |\alpha| < r \},$$

并且这一理想由形如

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = r$$

的 r 次单项式芽生成.

证 $\mathcal{M}_n^r\cdot\varepsilon_{k+n}=\{f\in\varepsilon_{k+n}\mid f=\sum_i f_{i_1}\cdots f_{i_r},f_{i_j}\in\mathcal{M}_n\cdot\varepsilon_{k+n}\}$，其中 $\sum_i$ 为有限和. 据定理 1.1.1，本定理的第二个断言明显成立.

至于第一个断言，从乘积的求导法则可知，$f\in\mathcal{M}_n^r\cdot\varepsilon_{k+n}\Rightarrow D^{\lambda,\alpha}f\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0$ 对所有 λ 及所有 $\alpha(|\alpha|<r)$ 皆成立. 另一方面，若对每一 $\alpha(|\alpha|<r)$ 有 $D^{0,\alpha}f\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0$，则依归纳法，$f\in\mathcal{M}_n^{r-1}\cdot\varepsilon_{k+n}$ 且 $f=\sum_{|\alpha|=r-1}f_\alpha\cdot x^\alpha$. 欲证 $f\in\mathcal{M}_n^r\cdot\varepsilon_{k+n}$，只需证对所有 $\alpha,|\alpha|=r-1,f_\alpha\in\mathcal{M}_n\cdot\varepsilon_{k+n}$，即 $f_\alpha\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0$ 就行了. 倘若存在 $\alpha_0,|\alpha_0|=r-1$，使得 $f_{\alpha_0}\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}\neq 0$，则在 $\mathbb{R}^k\times\{0\}$ 上，

$$D^{0,\alpha_0}f=\sum_\alpha D^{0,\alpha_0}(f_\alpha\cdot x^\alpha)=\alpha_0!\cdot f_{\alpha_0}\neq 0,$$

这与 $D^{0,\alpha}f\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}=0$ 对所有 $\alpha(|\alpha|<r)$ 均成立相矛盾!

推论 1.1.1 设 $f\in\varepsilon_n$，则 $f\in\mathcal{M}_n^{r+1}\Leftrightarrow f$ 以及它的阶数不大于 r 的所有偏导数在 $0\in\mathbb{R}^n$ 的值均为零.

我们将属于 $\mathcal{M}_n^{r+1}$ 中的函数芽叫做在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处 r-平坦的函数芽.

1.1.3 导网(导网)空间 J_n^r

设 $f\in\varepsilon_n$. 依 Taylor 公式，将 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处做 Taylor 展开，得

$$f(x)=f(0)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant r}\frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}x^\alpha+\varepsilon(x),\tag{3}$$

其中余项 $\varepsilon(x)\in\mathcal{M}_n^{r+1}$. $f\in\varepsilon_n$ 在 $\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^{r+1}$ 中的像叫做 f 的 r-导网，记为 $j^r(f)$ 或 j^rf. 由上式知，j^rf 可表示为 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 r 阶 Taylor 多项式. 因此 ε_n 中二函数芽 f 和 g 具有相同的 r-导网，当且仅当 f 与 g 以及它们的阶数直到 r 的所有相应的偏导数在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的值均相等.

将商代数 $\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^{r+1}$ 记作$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$,简记为$J_n^r$.根据 Taylor 公式,$J_n^r$ 标准地同构于次数不大于 r 的 n 元多项式代数.在这一多项式代数中的乘法是将两个次数不大于 r 的 n 元多项式按通常的方式相乘然后舍去次数大于 r 的所有各项.J_n^r 还叫做$\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 函数在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 r-导网组成的代数. 显然

$$\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^{r+1}\cong\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/\langle x_1,\cdots,x_n\rangle^{r+1},$$

其中$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$表示 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式环,$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle^{r+1}$表示由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的理想$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$的$(r+1)$次幂.

商空间 $\mathcal{M}_n^r/\mathcal{M}_n^{r+1}$ 可以标准地等同于 n 元 r 次齐次多项式所成的实向量空间.

1.1.4 ε_n 中具有有限余维的理想

设 I 是ε_n 中的理想.若 ε_n/I 作为实向量空间是有限维的,则 I 叫做ε_n 中余维有限的理想.数$\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/I$,记为 Codim$I$,叫做 I 在 ε_n 中的余维数.例如,$\mathcal{M}_n^r$(r 为自然数)便是 ε_n 中余维有限的理想.

命题 1.1.1 设 I 为ε_n 中理想,I 在J_n^r 中的投影记为$\bar{I}$,则下列条件是等价的:

(i) $I\supset\mathcal{M}_n^r$,

(ii) $\bar{I}\supset\mathcal{M}_n^r/\mathcal{M}_n^{r+1}$,即 $I+\mathcal{M}_n^{r+1}\supset\mathcal{M}_n^r$.

证 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(i) 设$\{g_1,\cdots,g_s\}$是 $\mathcal{M}_n^r$ 的一组生成元,例如可取形如 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$,$\alpha_i$ 为非负整数且$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r$ 的 r 次单项式作为 $\mathcal{M}_n^r$ 的生成元.

由条件 $\mathcal{M}_n^r\subset I+\mathcal{M}_n^{r+1}$,则对每一 $g_i(i=1,\cdots,s)$,可找到 $f_i\in I$,使得

$$g_i-f_i\in\mathcal{M}_n^{r+1},$$

而 $\mathcal{M}_n^{r+1}=\mathcal{M}_n\cdot\mathcal{M}_n^r$ 的每一元素可表为 $\sum_{j=1}^{s}\lambda^j g_j\,(\lambda^j\in\mathcal{M}_n)$，因此

$$g_i = f_i + \sum_{j=1}^{s}\lambda_i^j g_j,\quad \lambda_i^j\in\mathcal{M}_n,\quad i,j=1,\cdots,s.$$

或

$$g_i - \sum_{j=1}^{s}\lambda_i^j g_j = f_i,\quad i=1,\cdots,s. \tag{4}$$

用矩阵来表示方程组(4)，有

$$M\cdot g = f,$$

其中 $M=(\delta_i^j-\lambda_i^j)_{1\leqslant i,j\leqslant s}$，$\delta_i^j$ 为 Kronecker 符号，当 $i=j$ 时值为 1，否则为 0，又 $g=(g_1,\cdots,g_s)^{\mathrm T}$，$f=(f_1,\cdots,f_s)^{\mathrm T}$ 为列向量.

因为 $\lambda_i^j\in\mathcal{M}_n$，$M(0)$ 为单位矩阵并且 $\det M(0)=1$，所以 $\det M\in\varepsilon_n$ 是可逆的. 借助高等代数知识可求出逆矩阵 M^{-1}，其元素 $\in\varepsilon_n$，于是

$$g = M^{-1}\cdot f.$$

该方程说明每一 g_i 可表为诸 f_j 的线性组合，其系数取自 ε_n. 因诸 f_j 属于 I，故每一 g_i 属于 I，从而 $\mathcal{M}_n^r\subset I$.

推论 1.1.2 设 I 是 ε_n 中理想，则下列条件等价：

(i) I 在 ε_n 中具有有限余维，

(ii) 存在正整数 r 使得 $I\supset\mathcal{M}_n^r$.

证 (ii)⇒(i) 因 $\mathcal{M}_n^r$ 具有有限余维，故

$$\dim_{\mathbb R}\varepsilon_n/I\leqslant\dim_{\mathbb R}\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^r<\infty.$$

(i)⇒(ii) 因

$$I+\mathcal{M}_n\supset I+\mathcal{M}_n^2\supset\cdots\supset I+\mathcal{M}_n^r\supset I+\mathcal{M}_n^{r+1}\supset\cdots\supset I,$$

我们有

$$\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/(I+\mathcal{M}_n)\leqslant\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/(I+\mathcal{M}_n^2)\leqslant\cdots\leqslant\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/(I+\mathcal{M}_n^r)$$
$$\leqslant\cdots\leqslant\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/I<\infty,$$

因此必存在 r_0,使得

$$\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/(I+\mathcal{M}_n^{r_0})=\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/(I+\mathcal{M}_n^{r_0+1}),$$

于是

$$I+\mathcal{M}_n^{r_0}=I+\mathcal{M}_n^{r_0+1}.$$

将命题 1.1.1 应用于 $\mathcal{M}_n^{r_0}\subset I+\mathcal{M}_n^{r_0+1}$,得 $\mathcal{M}_n^{r_0}\subset I$. 证毕.

为研究 ε_n 中余维有限的理想 I,仿前考虑理想的序列套

$$\varepsilon_n\underset{c_1=1}{\supset}\mathcal{M}_n\underset{c_2}{\supset}I+\mathcal{M}_n^2\underset{c_3}{\supset}\cdots\underset{c_{r-1}}{\supset}I+\mathcal{M}_n^{r-1}\underset{c_r}{\supset}I+\mathcal{M}_n^r\supset\cdots,$$

其中 $c_1=\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/\mathcal{M}_n=1$. 一般地,令

$$c_r=\dim_{\mathbb{R}}\frac{I+\mathcal{M}_n^{r-1}}{I+\mathcal{M}_n^r},\quad r=2,3,\cdots,$$

它可以看做是 $I+\mathcal{M}_n^r$ 在 $I+\mathcal{M}_n^{r-1}$ 中的余维数. 如果对某一 k,有 $c_k=0$,则

$$I+\mathcal{M}_n^{k-1}=I+\mathcal{M}_n^k,$$

因而 $I\supset\mathcal{M}_n^{k-1}$. 此外,当 $s\geqslant k$ 时,$c_s=0$. 容易验证

$$\operatorname{Codim}I=c_1+c_2+\cdots+c_{k-1},$$

这说明有限序列 $\{c_1,c_2,\cdots,c_{k-1}\}$ 为理想 I 提供了重要信息.

例 1 在一元函数芽环 ε_1 中,余维为 r 的理想恰好是 $\mathcal{M}_1^r$.

例 2 讨论 ε_2 中余维为 3 的理想 I,此时只有两种可能情形:

(i) $c_1=1,\quad c_2=2,\quad c_3=0,$

(ii) $c_1=1,\quad c_2=1,\quad c_3=1\quad,c_4=0.$

对于情形(i). 因 $c_3=0$,故 $I\supset\mathcal{M}_2^2$,从而

$$\varepsilon_2 \underset{c_1=1}{\supset} \mathcal{M}_2 \underset{c_2=2}{\supset} I \supset \mathcal{M}_2^2.$$

而 $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_2^2=2$,故 $I=\mathcal{M}_2^2$.

对于情形(ii). 因 $c_4=0$, $I\supset\mathcal{M}_2^3$,于是

$$\varepsilon_2 \underset{1}{\supset} \mathcal{M}_2 \underset{1}{\supset} I+\mathcal{M}_2^2 \underset{1}{\supset} I \supset \mathcal{M}_2^3.$$

由于 $c_2=1$ 且 $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}_2/\mathcal{M}_2^2=2$,因此 I 必含一函数芽 f. 它在原点的一阶偏导数不全为 0,不妨设 $\frac{\partial f}{\partial x}(0)\neq 0$. 在源平面 $\mathbb{R}^2$ 上作一局部坐标变换,令 $\phi:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 定义为

$$(x,y)\mapsto(u=f(x,y),v=y),$$

$$\mathrm{D}\phi(0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \det\mathrm{D}\phi(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0)\neq 0.$$

据反函数定理,ϕ 有逆映射 ϕ^{-1},且 $\phi^{-1}\in C^{\infty}$. 显然 $(f\cdot\phi^{-1})(u,v)=u$,这表明在源平面上选取适当的局部坐标系(不妨记作 $\{x,y\}$),函数芽 f 可表示为坐标函数芽 x.

因此我们可假定 $x\in I$. 记 ε_2 为 $\varepsilon_{x,y}$,则由 x 生成的理想为 $\mathcal{M}_x\cdot\varepsilon_{x,y}$ 或写为 $\langle x\rangle\varepsilon_{x,y}$. 显然 $\mathcal{M}_x\cdot\varepsilon_{x,y}\subset I$,又 $\varepsilon_{x,y}/\mathcal{M}_x\cdot\varepsilon_{x,y}\cong\varepsilon_y$. 令 I 在 ε_y 中的投影为 $\bar{I}$.

由于 $c_3=1$,所以 $y^2\notin I$, $I+\mathcal{M}_{x,y}^2=\langle x,y^2\rangle\varepsilon_{x,y}$.

$$\begin{aligned}1&=\dim_{\mathbb{R}}\frac{I+\mathcal{M}_{x,y}^2}{I}\\&=\dim_{\mathbb{R}}(I+\mathcal{M}_{x,y}^2)/\mathcal{M}_x\cdot\varepsilon_{x,y}\Big/I/\mathcal{M}_x\cdot\varepsilon_{x,y}\\&=\dim_{\mathbb{R}}\langle y^2\rangle\varepsilon_y\Big/\bar{I},\end{aligned}$$

于是有 $\bar{I}=\langle y^3\rangle\varepsilon_y$, $I=\langle x,y^3\rangle\varepsilon_{x,y}$.

§1.2 具有常秩的光滑映射芽

1.2.1 C^∞映射芽

设 $f:U\to\mathbb{R}^p$ 为映射,其中 U 为$\mathbb{R}^n$ 中的开子集,f 可用它的分量函数表示为 $f=(f_1,\cdots,f_p)$. 如果每一个 $f_i:U\to\mathbb{R}$ 都是 U 上的C^∞ 函数($i=1,\cdots,p$),则称 f 为 U 上的 C^∞ 可微映射,简称为 C^∞ 映射或光滑映射.

更为一般的情形. 设 $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}^p$, $f:X\to Y$. 如果对于每一个 $x\in X$,存在包含点 x 的开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 以及 C^∞ 映射 $F:U\to\mathbb{R}^p$,使得 F 和 f 在 $U\cap X$ 上是一致的,则称 f 为光滑映射.

定义 1.2.1 C^∞映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 指的是 C^∞可微映射 $g:U\to\mathbb{R}^p$ 的一个等价类,这里 U 为点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的开邻域. 等价关系"$\sim$"规定如下:$(g:U\to\mathbb{R}^p)\sim(h:V\to\mathbb{R}^p)\Leftrightarrow$存在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的开邻域 $W\subset U\cap V$,使得 $g|W=h|W$. 等价类 f 所含的任意成员 g 叫做 f 的一个代表.

有关映射的许多标准概念可以用明显的方式延伸到映射芽. 例如,设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$, $g:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^q$ 为映射芽,则 $(f,g):(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 定义为

$$(\tilde{f},\tilde{g}):U\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,x\mapsto(\tilde{f}(x),\tilde{g}(x))$$

在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽,其中 $\tilde{f}:U\to\mathbb{R}^p$, $\tilde{g}:U\to\mathbb{R}^q$ 分别为 f 和 g 的代表.

若 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 与 $g:(\mathbb{R}^m,0)\to\mathbb{R}^q$ 为映射芽,定义 $f\times g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,(0,0))\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 为

$$\tilde{f}\times\tilde{g}:U_1\times U_2\to\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,(x_1,x_2)\mapsto(\tilde{f}(x_1),\tilde{g}(x_2))$$

在点$(0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 处的芽,其中 $\tilde{f}:U_1\to\mathbb{R}^p$, $\tilde{g}:U_2\to\mathbb{R}^q$ 分别为 f 与 g 的代表.

假设$0\in X\subset\mathbb{R}^n$，映射芽$f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$在$X$上的限制(记为$f|X$)定义为$\tilde{f}|X\cap U$在点$0\in\mathbb{R}^n$处的芽，其中$\tilde{f}:U\to\mathbb{R}^p$为$f$的任意一个代表.

映射芽$f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$(其中$y=f(x)$)与$g:(\mathbb{R}^p,y)\to\mathbb{R}^q$可以复合成映射芽$g\circ f:(\mathbb{R}^n,x)\to\mathbb{R}^q$. 设$\tilde{f}:U\to\mathbb{R}^p$，$\tilde{g}:V\to\mathbb{R}^q$分别为$f$与$g$的代表，则$\tilde{f}|U\cap\tilde{f}^{-1}(V)$也是$f$的一个代表. 通常的映射复合$\tilde{g}\circ\tilde{f}:U\cap\tilde{f}^{-1}(V)\to\mathbb{R}^q$便是$g\circ f$的一个代表.

定义 1.2.2 设$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$C^\infty$映射芽. 定义$f^*:\varepsilon_p\to\varepsilon_n$为

$$f^*(\alpha)=\alpha\circ f,\quad\forall\alpha\in\varepsilon_p,$$

易见f^*是一个环同态. 实际上f^*还是一个代数同态. f^*具有下列函子性质:

(i) 若$\mathrm{id}:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$为恒同映射芽，则$\mathrm{id}^*:\varepsilon_n\to\varepsilon_n$为恒同同态.

(ii) 若$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$和$g:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^q,0)$为$C^\infty$映射芽，则$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

此外，$\quad f^*(\mathscr{M}_p)\subset\mathscr{M}_n$.

作为简单练习题，以上诸结论请读者验证.

定义 1.2.3 设$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$C^\infty$映射芽. 我们用$T_0\mathbb{R}^n$和$T_0\mathbb{R}^p$分别表示$\mathbb{R}^n$与$\mathbb{R}^p$在原点处的切空间. 定义$f$在点$0\in\mathbb{R}^n$处的切映射(或微分)$T_0f$如下.

$T_0f:T_0\mathbb{R}^n\to T_0\mathbb{R}^p$,

$$X\mapsto T_0f(X)=X\circ f^*,$$

易见T_0f是一个线性映射，并且对任意$\alpha\in\varepsilon_p$，

$$T_0f(X)(\alpha)=X\circ f^*(\alpha)=X(\alpha\circ f).\tag{1}$$

假设$\{x_1,\cdots,x_n\}$，$\{y_1,\cdots,y_p\}$分别为$(\mathbb{R}^n,0)$与$(\mathbb{R}^p,0)$的局部坐标系. 据定理 1.1.2，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_0:i=1,\cdots,n\right\}$，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_0:j=1,\cdots,p\right\}$分别

为 $T_0\mathbb{R}^n$ 和 $T_0\mathbb{R}^p$ 的基. 由(1)式,有

$$T_0f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_0\right)(\alpha)=\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_0(\alpha\circ f)$$

$$=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}(0)\cdot\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0),\qquad\forall\alpha\in\varepsilon_p,$$

因此

$$T_0f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_0\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_0,i=1,\cdots,n,$$

于是我们可用矩阵来表示 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的微分: 设 $X=\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0$, 则 $T_0f(X)=\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_0$, 其中 $b=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right)\cdot a$, 且 $a=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm{tr}}$, $b=(b_1,\cdots,b_p)^{\mathrm{tr}}$.

记 $\mathrm{D}f(0)=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, 叫做 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 Jacobi 矩阵.

现将上面所述概括为下面的

定理 1.2.1 设$\{x_1,\cdots,x_n\}$, $\{y_1,\cdots,y_p\}$分别为$(\mathbb{R}^n,0)$与$(\mathbb{R}^p,0)$的坐标系,则$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_0:i=1,\cdots,n\right\}$和$\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_0:j=1,\cdots,p\right\}$分别为切空间 $T_0\mathbb{R}^n$ 及 $T_0\mathbb{R}^p$ 的基. C^∞映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的切映射 T_0f 关于这些基而言可用线性映射

$$\mathrm{D}f(0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$$

来表示. $\mathrm{D}f=\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$叫做$f$ 的 Jacobi 矩阵.

定义 1.2.4 C^∞映射芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^n,y)$叫做微分同胚芽(或 C^∞可逆芽),如果它的一个代表 $\tilde{\phi}:U\to\mathbb{R}^n$($U$ 为 $x\in\mathbb{R}^n$ 的开邻域)满足下列条件:

(i) $\tilde{\phi}(x)=y$,

(ii) $\tilde{\phi}$是从包含点 x 的开集$U'\subset U$ 到$\tilde{\phi}(U')$上的(C^∞)微分同胚.

微积分中的反函数定理可叙述为

定理 1.2.2 C^∞映射芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^n,y)$是微分同胚芽当且仅当 ϕ 的 Jacobi 矩阵 $D\phi(x)$是可逆的.

1.2.2 具有常秩的芽

设 U 为$\mathbb{R}^n$ 的开集,$f:U\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞映射,则映射

$$Df:U\to\mathbb{R}^{pn}=\{p\times n\text{ 矩阵}\},x\mapsto Df(x)$$

也是 C^∞映射. f 在点$x\in U$ 的秩规定为矩阵 $Df(x)$的秩,记为 rk_xf. 若 $rk_xf\geqslant s$,则存在 $Df(x)$的某个 $s\times s$ 子矩阵,其行列式不为零. 这一行列式在点 x 的某一邻域内也不为零,这是因为 Df 及行列式 $\det Df$ 是连续的,因此 f 的秩在 x 的一邻域内不小于 s. f 的秩局部不会减小说明映射 $U\to\mathbb{Z},x\mapsto rk_xf$ 是下半连续的. 于是对任意 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to\mathbb{R}^p$,对应一个下半连续函数芽 $rkf:(\mathbb{R}^n,x)\to\mathbb{Z},y\mapsto rk_yf$. 我们说 f 是一个具有常秩的映射芽是指芽 rkf 为常值函数芽.

从反函数定理 1.2.2 将导出一个重要结论,这就是下面的秩定理(参看文献[8]或[9]).

定理 1.2.3 设 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$是具有常秩 k 的C^∞映射芽,则存在可逆芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^n,0)$和 $\psi:(\mathbb{R}^p,y)\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得芽

$$\psi\circ f\circ\phi^{-1}:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$$

可表示为

$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_k,\underbrace{0,\cdots,0}_{(p-k)\text{个}}).$$

证 不失一般性,假定 $x=0,y=0$. 选取 f 的一个代表$\tilde{f}$,它

具有常秩 k，因而 $D\tilde{f}$ 有一个 $k\times k$ 子矩阵在原点是非退化的. 对矩阵做初等变换，相当于在$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^p$ 上分别做非退化线性坐标变换(因而是局部微分同胚)，可以假定子矩阵

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j}(0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$$

是非退化的，因而在原点的某一邻域 U 内也是非退化的. 定义 $\tilde{\phi}$: $U\to\mathbb{R}^n$ 为

$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(\tilde{f}_1(x),\cdots,\tilde{f}_k(x),x_{k+1},\cdots,x_n),$$

这里$(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_k)$为 $\tilde{f}$ 的k 个分量. 由

$$D\tilde{\phi}=\underbrace{\begin{pmatrix} & \partial\tilde{f}_i/\partial x_j & \\ \hdashline & & 1 \quad 0 \\ 0 & \vdots & \ddots \\ & & 0 \quad 1 \end{pmatrix}}_{k \qquad n-k}\begin{matrix}\}k \\ \}n-k\end{matrix},$$

$$\det(D\tilde{\phi})=\det\left(\frac{\partial\tilde{f}_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant k}\neq 0 \qquad 在 U 上,$$

说明以 $\tilde{\phi}$为代表的映射芽 ϕ:$(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$是一个可逆芽，并且下列图表

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p,0) \\ & \phi\searrow \quad \nearrow g=f\circ\phi^{-1} & \\ & (\mathbb{R}^n,0) & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} (x_1,\cdots,x_n) & \xrightarrow{f} & (f_1,\cdots,f_p) \\ & \phi\searrow \quad \nearrow g & \\ & (f_1,\cdots,f_k,x_{k+1},\cdots,x_n) & \\ & \| & \\ & (z_1,\cdots,z_k,z_{k+1},\cdots,z_n) & \end{array}$$

说明芽 $g=f\circ\phi^{-1}$ 可表示为

$$z=(z_1,\cdots,z_n)\overset{\tilde{g}}{\mapsto}(z_1,\cdots,z_k,\tilde{g}_{k+1}(z),\cdots,\tilde{g}_p(z)).$$

$$\mathrm{D}\tilde{g}=\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \\ & \ddots & 0\\ 0 & 1 & \\ \hline * & & A(z)\end{array}\right)}_{k\quad n-k}\begin{array}{l}\}k\\ \}p-k\end{array},$$

其中

$$A(z)=\left(\frac{\partial\tilde{g}_j}{\partial z_i}\right)_{\substack{k+1\leqslant j\leqslant p\\ k+1\leqslant i\leqslant n}},$$

因为在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域 $\tilde{\phi}(U)$ 内，$rk(\tilde{g})=rk(D\tilde{g})=k$，所以在该邻域内，矩阵 $A(z)$ 必为零矩阵，于是

$$\frac{\partial\tilde{g}_j}{\partial z_i}=0,\quad k+1\leqslant j\leqslant p,\quad k+1\leqslant i\leqslant n.\tag{2}$$

现在值域 $\mathbb{R}^p$ 中施行局部坐标变换，$\psi:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 由下式给出

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_k\\ y_{k+1}\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_k\\ y_{k+1}-\tilde{g}_{k+1}(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)\\ \vdots\\ y_p-\tilde{g}_p(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)\end{pmatrix},$$

又

$$D\psi = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ * & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \}k \\ \}p-k \end{matrix} \\ \underbrace{\hphantom{000}}_{k}\ \underbrace{\hphantom{000}}_{p-k} & \end{array} ,$$

故 ψ 是可逆芽,并且 $\psi \circ g$ 可表示为下列映射的复合:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \tilde{g}_{k+1}(z) \\ \vdots \\ \tilde{g}_p(z) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \tilde{g}_{k+1}(z) - \tilde{g}_{k+1}(z_1, \cdots, z_k, 0, \cdots, 0) \\ \vdots \\ \tilde{g}_p(z) - \tilde{g}_p(z_1, \cdots, z_k, 0, \cdots, 0) \end{pmatrix}$$

由式(2)知,这一复合的后$(p-k)$个分量

$$\tilde{g}_{k+j}(z_1, \cdots, z_n) - \tilde{g}_{k+j}(z_1, \cdots, z_k, 0, \cdots, 0)$$

在一个 n 维方体$|z_j| < \varepsilon$ 上为 0,于是 $\psi \circ g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ 可表示为

$$(z_1, \cdots, z_n) \mapsto (z_1, \cdots, z_k, 0, \cdots, 0).$$

1.2.3 应用

定义 1.2.5 设 U 为$\mathbb{R}^n$ 中开集,$f: U \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射.

(i) 如果对每一 $x \in U$, $rk_x f = p$,那么 f 叫做淹没(submersion),

(ii) 如果对每一 $x \in U$, $rk_x f = n$,那么 f 叫做浸入(immersion) .

不论是哪种情形,$rk_x f$ 达到极大,秩局部为常值.应用秩定理,在$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^p$ 中选取适当坐标系,淹没芽具有下列形式:

$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_p),$$

而浸入芽则表示为

$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{p-n}).$$

从局部来看,淹没相当于投射,浸入则表示为包含映射,可看做是嵌入.

定义 1.2.6 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 M 叫做$\mathbb{R}^n$ 的 $m(\leqslant n)$维 C^∞ 微分子流形,如果对每一 $x\in M$,存在 C^∞ 可逆芽 $\phi:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得

$$\phi(M,x)=(\mathbb{R}^m,0)\subset(\mathbb{R}^n,0),$$

这里$\mathbb{R}^m$ 线性地嵌入$\mathbb{R}^n$ 中.

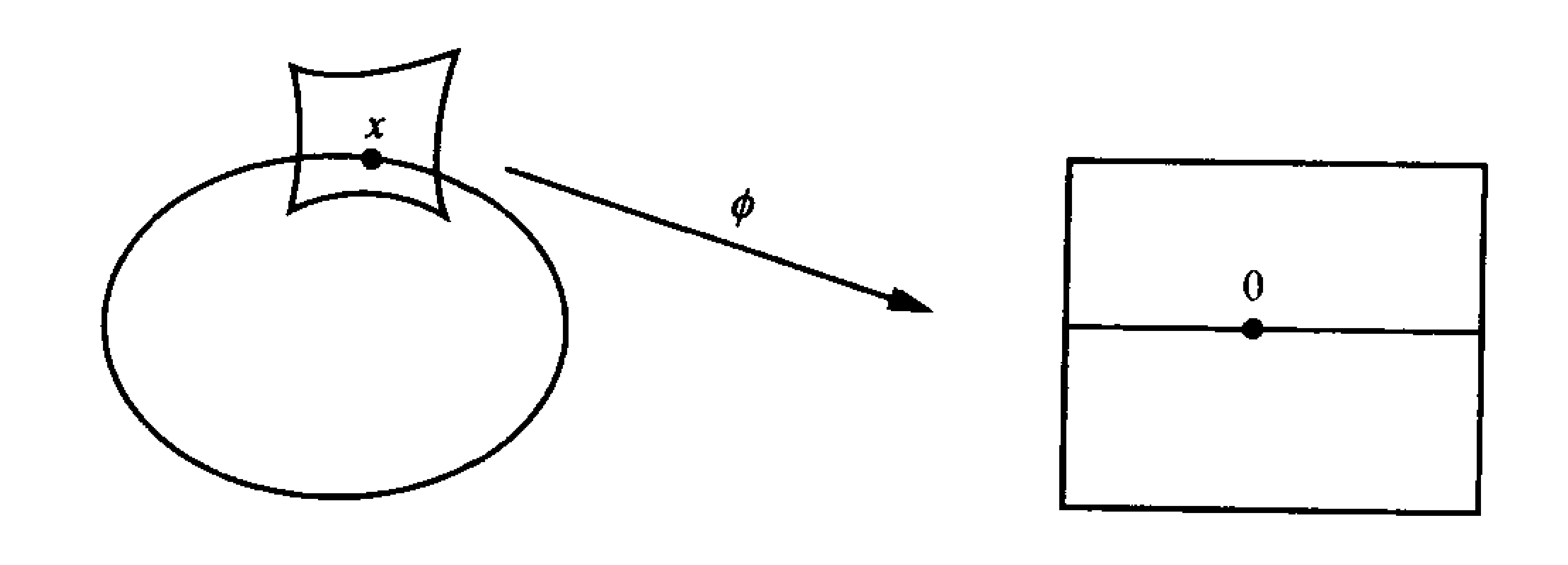


图 1.1

例 1 (i) n 维球面 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\langle x,x\rangle=1\}$ 是$\mathbb{R}^{n+1}$中的 n 维微分子流形.

(ii) 环面 $S^1\times S^1$ 是$\mathbb{R}^3$ 中的二维微分子流形.

例 2 将 $p\times n$ 矩阵所成之集记为$M(p,n)$,它可以等同于$\mathbb{R}^{pn}$.因$\mathbb{R}^{pn}$是微分流形,因此可赋予 $M(p,n)$以拓扑结构与微分结构,使之成为一个微分流形.令 $M(p,n;k)$表示秩为 k 的$p\times n$ 矩阵组成的集,

$$M(p,n;k)=\{E\in M(p,n)\mid\operatorname{rank}E=k\}.$$

若 $p\geqslant n$,则 $M(p,n;n)$为 $M(p,n)$的开子集.一般地,我们有下

列结论：$M(p,n;k)$为$M(p,n)$的微分子流形，维数为$k(p+n-k)$，$k\leqslant\min(p,n)$.

设$E_0\in M(p,n;k)$.不失一般性，假定

$$E_0=\begin{pmatrix}A_0 & B_0\\ C_0 & D_0\end{pmatrix},$$

其中A_0为非退化$k\times k$矩阵.将A_0的元素做微小变动得A，使得$\det A\neq 0$.换言之，存在$\varepsilon>0$，使得当$A-A_0$的所有元素都小于ε时，A也是非退化的.令

$$U=\left\{E=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in M(p,n)\,\middle|\,A-A_0\text{ 的所有元素都小于 }\varepsilon\right\},$$

易见U是$M(p,n)$中开集，且$E_0\in U$.因矩阵

$$\begin{pmatrix}I_k & 0\\ X & I_{p-k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ XA+C & XB+D\end{pmatrix}$$

的秩与E的秩相同，取$X=-CA^{-1}$，这个矩阵可写为

$$\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{pmatrix}.$$

若$D=CA^{-1}B$，这一矩阵的秩为k，反之也成立，因而

$$U\cap M(p,n;k)=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & CA^{-1}B\end{pmatrix}\,\middle|\,A-A_0\text{ 的所有元素}<\varepsilon\right\}$$

是E_0在$M(p,n;k)$中的邻域.令

$$W=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & 0\end{pmatrix}\,\middle|\,A-A_0\text{ 的所有元素都小于 }\varepsilon\right\},$$

它是$pn-(p-k)(n-k)=k(p+n-k)$维欧氏空间中的开集.

作映射

$$W \longrightarrow U \cap M(p,n;k),$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

显然它是一个微分同胚.

定义 1.2.7 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射.

(i) 点 $y \in f(\mathbb{R}^n)(\subset \mathbb{R}^p)$ 叫做 f 的正则值,如果对每一 $x \in f^{-1}(y)$,芽 $f:(\mathbb{R}^n,x) \to \mathbb{R}^p$ 为淹没芽(即 $rk_x f = p$). 此时集 $f^{-1}(y)(\neq \varnothing)$ 中的每一点叫做 f 的正则点. 倘若 $y \notin (\mathbb{R}^n)$,规定 y 为 f 的正则值.

若 $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ 且含有 f 的非正则点,则 y 称为 f 的临界值. 此外,f 的非正则点又叫做临界点.

(ii) 点 $x \in \mathbb{R}^n$ 叫做 f 的奇点,若芽 $f:(\mathbb{R}^n,x) \to \mathbb{R}^p$ 为奇异芽,即若 $rk_x f < \min(n,p)$.

f 的所有奇点所成之集记为 Σf,叫做 f 的奇点集. $\Sigma f(\subset \mathbb{R}^n)$ 在 f 下的像集叫做分歧集.

例 3 设 U 为$\mathbb{R}^n$ 中开集,$f:U \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数,则方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\cdots,n$$

的解集(如果非空)便是 f 的临界点集.

特别,一元函数的极大值点、极小值点以及拐点等均为奇点.

定理 1.2.4 假设 y 是C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 的一个正则值,则 $f^{-1}(y)$是$\mathbb{R}^n$ 中的$(n-p)$维微分子流形或为空集.

证 假定 $f^{-1}(y) \neq \varnothing$. 取 $x \in f^{-1}(y)$,则 $f(x) = y$ 且 $rk_x f = p$,这说明 f 的秩在点x 附近局部为常值,据秩定理 1.2.3,存在局部可逆变换 $\phi:(\mathbb{R}^n,x) \to (\mathbb{R}^n,0)$和 $\psi:(\mathbb{R}^p,y) \to (\mathbb{R}^p,0)$,使得芽 $f_1 = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$具有下列形式:

$$f_1(x_1,\cdots,x_p,\cdots,x_n) = (x_1,\cdots,x_p),$$

因此芽 $f_1^{-1}(0) = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0) = \phi \circ f^{-1}(y)$ 是集 $\{(0,\cdots,0,x_{p+1},\cdots,x_n)\}$ 在原点处的芽. 依子流形定义, $f^{-1}(y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中维数为 $n-p$ 的微分子流形.

§1.3　$\mathbb{R}^n$ 的局部微分同胚群

1.3.1　群 L_n 及其在 ε_n 上的作用

本节对微分同胚芽(见定义 1.2.4)做进一步讨论. 我们将所有的微分同胚芽 ϕ;$(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 组成之集记为 L_n, 用映射芽的复合作为群运算, 容易验证 L_n 形成一个群. 考虑群 L_n 在环 ε_n 上的作用. 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数芽, $\phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 为可逆芽, 将 ϕ 从右边与 f 复合得 $f\circ\phi$, 这意味着对 f 的源空间 $\mathbb{R}^n$ 施行一 C^∞ 局部坐标变换 ϕ, 因此群 L_n 在 ε_n 上的作用 $\varepsilon_n \times L_n \to \varepsilon_n$ 定义为

$$(f,\phi) \mapsto f\circ\phi.$$

设 $f,g\in\varepsilon_n$. 若存在 $\phi\in L_n$, 使得 $g=f\circ\phi$, 则 f 和 g 叫做同构的或依 Mather 的说法, f 与 g 是右等价的, 记为 $f \underset{\mathscr{R}}{\sim} g$. 令

$$L_n\cdot f = \{f\circ\phi \mid \phi\in L_n\}\subset\varepsilon_n,$$

它是在群 L_n 的作用下经过 f 的一条轨道. $f\underset{\mathscr{R}}{\sim} g$ 表示 f 和 g 位于群 L_n 的同一条轨道中.

取 $\phi\in L_n$, 依定义 1.2.2, 有环 ε_n 的自同态

$$\phi^*:\varepsilon_n\to\varepsilon_n, f\mapsto f\circ\phi,$$

利用函子性质可证明 ϕ^* 是环 ε_n 的自同构.

1.3.2　Lie 群 L_n^r 在 J_n^r 上的作用

设 r 为自然数. 根据 Taylor 公式, $\phi\in L_n$ 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 r

阶 Taylor 展式可写为

$$\phi(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_r(x)+\delta(x), \qquad (1)$$

其中 $P_1=\mathrm{D}\phi(0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为线性自同构，$P_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 k 次齐次多项式映射，$k=2,\cdots,r$. 余项 $\delta(x)=(\delta_1(x),\cdots,\delta_n(x))$，每一分量 $\delta_i\in\mathscr{M}_n^{r+1}$.

特别，若 $\phi(x)=x+\delta(x)$，此时 P_1 为$\mathbb{R}^n$ 上的恒同映射 I，$P_2=\cdots=P_r=0$(这里 0 表零映射)，这说明 $\phi-I$ 的每一分量都属于 $\mathscr{M}_n^{r+1}$. 我们称这样的 ϕ 关于恒同映射是 r-平坦的. 所有的 r-平坦芽组成 L_n 的一个正规子群(请读者验证)，记为 $L_n^{(r)}$.

令 $L_n^r=L_n/L_n^{(r)}$，并用

$$j^r:L_n\to L_n^r$$

表标准投影. $j^r\phi$ 为 $\phi\in L_n$ 在 L_n^r 中的像，叫做 ϕ 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的 r-导网. L_n^r 称为由$(\mathbb{R}^n,0)$上的 C^∞ 可逆芽的 r-导网所成的群.

对任意 $\phi\in L_n$，据公式(1)，$j^r\phi$ 可表示为

$$x\mapsto j^r\phi(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_r(x), \qquad (2)$$

其中诸 P_k 如式(1)中所述，因此 L_n^r 可以和形如式(2)的多项式映射所成的实向量空间等同. 特别地，群 L_n^1 可等同于$\mathbb{R}^n$ 的自同构群 $GL(n,\mathbb{R})$，这是大家熟悉的实一般线性群.

L_n^r 中的群运算是代数运算. 设 $P,Q\in L_n^r$，$P\cdot Q$ 是指将 P 与 Q 复合得到次数不大于 r^2 的多项式映射 $P\circ Q$，然后舍去 $P\circ Q$ 中次数大于 r 的各项.

命题 1.3.1 群 L_n^r 可赋予 Lie 群结构.

证 (i) 赋予 L_n^r 以 C^∞ 微分流形结构. 我们用 l_n^r 表示从$\mathbb{R}^n$ 到自身的多项式映射

$$P(x)=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_r(x)$$

所成的实向量空间，其中 P_k 为 k 次齐次多项式映射($k=1,2,\cdots,$

r).显然

$$L_n^r = \{P \in l_n^r \mid \det P_1 \neq 0\}$$

是 l_n^r 的开子集,因此可赋予 L_n^r 以拓扑结构及微分结构,使之成为一个 C^∞ 流形.因为上述多项式映射 P 含有 $n\binom{n+r}{n}$ 个实系数,这 $n\binom{n+r}{n}$ 个系数组成 L_n^r 的一个整体坐标系,L_n^r 是一个维数为 $n\binom{n+r}{n}$ 的 C^∞ 流形.

(ii) 群运算 $L_n^r \times L_n^r \to L_n^r$,$(P,Q) \mapsto P\cdot Q$ 是代数运算因而是 C^∞ 映射.余下只需证明取逆运算 $L_n^r \to L_n^r$,$P \mapsto P^{-1}$ 是 C^∞ 映射.

对任意取定的 $P \in L_n^r$,定义向量空间 l_n^r 到自身的实线性映射

$$\alpha: l_n^r \to l_n^r, \quad Q \mapsto Q \cdot P,$$

该线性映射是满射.事实上,任取 $R \in l_n^r$,因 $P \in L_n^r$,故 $P \in L_n$.令 $Q = R \cdot j^r P^{-1}$,则 $Q \cdot P = R$.由于实线性映射 α 为满射,所以 α 是 l_n^l 的自同构.这一事实告诉我们,如果考虑映射

$$l_n^r \times L_n^r \to l_n^r, \qquad (Q,P) \mapsto Q \cdot P,$$

那么它关于 Q 求偏导数运算(作为实线性映射)应是 l_n^r 的一个自同构,因此将隐函数定理应用于方程

$$Q \cdot P = I$$

便可推出 $P \mapsto P^{-1}$ 为 C^∞ 映射.证毕.

设 $s \geqslant r$.定义标准投影 $L_n^s \to L_n^r$ 为舍去次数大于 r 的各项,这一映射是 Lie 群同态.

现考虑 Lie 群 L_n^r 在导网空间 J_n^r 上的作用.注意 J_n^r 同构于次数不大于 r 的 n 元多项式代数,因而可视为 C^∞ 流形.L_n^r 在 J_n^r 上

的作用规定如下：设 $f\in J_n^r$，$P\in L_n^r$. 将多项式映射 P 与 f 做复合，然后再舍去 $f\circ P$ 中次数大于 r 的各项，记为 $f\cdot P$. 显然

$$J_n^r\times L_n^r\to J_n^r,(f,P)\mapsto f\cdot P$$

表示 Lie 群 L_n^r 在代数 J_n^r 上的代数作用，叫做 Lie 群 L_n^r 的线性表示.

现在我们已规定了群 L_n 在环 ε_n 上的作用，又定义了 Lie 群 L_n^r 在代数 J_n^r 上的作用，这两种作用与标准投影 $j^r:L_n\to L_n^r$ 及 $j^r:\varepsilon_n\to J_n^r$ 是相容的，即下图可换：

$$\begin{array}{ccc}\varepsilon_n\times L_n & \longrightarrow & \varepsilon_n\\ {\scriptstyle j^r\times j^r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^r}\\ J_n^r\times L_n^r & \longrightarrow & J_n^r\end{array}$$

事实上，设 $f\in\varepsilon_n$，$\phi\in L_n$. 根据 Taylor 公式，

$$\phi=j^r\phi+\delta,\ \delta=(\delta_1,\cdots,\delta_n),\ \delta_i\in\mathcal{M}_n^{r+1},\ i=1,\cdots,n,$$

$$f=j^rf+\eta,\ \eta\in\mathcal{M}_n^{r+1},$$

所以

$$f\circ\phi=j^rf\circ j^r\phi+\zeta,\ \zeta\in\mathcal{M}_n^{r+1},$$

$$j^r(f\circ\phi)=j^rf\circ j^r\phi\text{ 再舍去次数大于 } r \text{ 的所有项}$$

$$=j^rf\cdot j^r\phi.$$

正因为有上述关系，我们说群 L_n 在 ε_n 上的作用诱导出 Lie 群 L_n^r 在 J_n^r 上的(商)作用.

显然，L_n 在 $\mathcal{M}_n^r/\mathcal{M}_n^{r+1}$（$n$ 元 r 次齐次多项式组成的向量空间）上的作用与 $GL(n,\mathbb{R})$ 在该空间上的作用相一致.

1.3.3 L_n 及 L_n^r 的无穷小生成元

记空间 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的坐标为 $t,x_1,\cdots,x_n$. 假设在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中包含 $\mathbb{R}$

$\times\{0\}$的一个开邻域上定义了 C^∞ 向量场 X,具有如下形式:

$$X(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中诸函数 X_i 均满足

$$X_i(t,0)=0 \qquad \forall\, t,$$

那么向量场 X 的轨道是下列一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(t,x) \qquad i=1,\cdots,n \tag{3}$$

的积分曲线.显然$\mathbb{R}\times\{0\}$是 X 的一条轨道.

我们用 $\phi(t,x)$表示方程组(3)满足初始条件 $\phi(0,x)=x$ 的解.根据一阶常微分方程组的基本定理,存在$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的开集 U,它包含$[0,1]\times\{0\}$,使得

1) U 是X 的通过点$(0,x)\in U$ 的轨道的并,并且 U 中的每一条轨道的定义域是区间$[0,1]$在$\mathbb{R}$ 中的一邻域,

2) 对每一 $t\in[0,1]$,令 $U_t=\{x\in\mathbb{R}^n\mid(t,x)\in U\}$,则映射

$$\phi_t:U_0\to U_t,\quad x\mapsto\phi_t(x)=\phi(t,x)$$

是一个微分同胚,且 $\phi_t(0)=0$.特别,ϕ_0 为恒同映射.

由此我们可得出下面的

命题 1.3.2 对于定义在($\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,$[0,1]\times\{0\}$)上的每一个向量场芽

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{4}$$

其中 $X_i(t,0)=0(t\in(\mathbb{R},[0,1]),i=1,\cdots,n)$.通过积分向量场 X 可得到($\mathbb{R}^n$,0)上的微分同胚芽,即 L_n 的一元.

事实上,将 X 对应于映射$\phi_1:U_0\to U_1$ 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽(仍记为 ϕ_1),则 $\phi_1\in L_n$.

定理 1.3.1 若映射芽 $\phi\in L_n$ 的 Jacobi 矩阵 $D\phi(0)$ 具有正值行列式，则存在形如式(4)的向量场芽 X，使得微分同胚芽 ϕ 由积分向量场芽 X 而得到.

证 将 ϕ 表为

$$\phi(x)=Ax+\psi(x),$$

其中 $A=D\phi(0)$，$\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n)$，每一分量 $\psi_i\in\mathcal{M}_n^2$. 由于一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 有二连通分支，其中一个分支是由具有正值行列式的 $n\times n$ 矩阵组成. 因此可在 $GL(n,\mathbb{R})$ 中选取一条 C^∞ 道路 $\alpha:\mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{R})$，$t\mapsto\alpha(t)$，使得 $\alpha(0)=I$(单位矩阵)，$\alpha(1)=A$. 令

$$\Phi(t,x)=\alpha(t)\cdot x+t\psi(x),$$

易见对每一固定的 t，映射 $x\mapsto\Phi_t(x)=\Phi(t,x)$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽是微分同胚芽，且 $\Phi_0=$ 恒同，$\Phi_1=\phi$. 记 $\Phi=(\Phi^1,\cdots,\Phi^n)$，这里 Φ^i 表 Φ 的第 i 个分量. 令

$$X(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i},$$

应用命题 1.3.2，通过积分 X 便得到上述微分同胚芽 ϕ. 证毕.

值得注意的是式(4)中的所有 $X_i(t,x)$ 均与 t 无关这种情形. 我们将向量场芽

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\ X_i\in\mathcal{M}_n(i=1,\cdots,n)\qquad(5)$$

所成之空间等同于 C^∞ 映射芽

$$X:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$$

所成的空间，并将这一实向量空间记为 l_n.

对任意 $X\in l_n$，令 $\widetilde{X}=\dfrac{\partial}{\partial t}+X$，此时方程组(3)变为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x), \qquad i = 1,\cdots,n, \tag{6}$$

它是自治的. 如前所述,通过求解上述方程组可得到单参数微分同胚芽群 $\{\phi_t \in L_n\}$,称为 L_n 的单参数子群,且 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\right|_{t=0} = X$.

现将上述事实概括为下列

定理 1.3.2 对于 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上的具有形如式(5)的每一向量场芽 X,通过积分可得到 L_n 的单参数子群 $\{\phi_t\}$ 满足 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\right|_{t=0} = X$.

X 叫做 $\{\phi_t \in L_n\}$ 的无穷小生成元,映射

$$l_n \to L_n, \quad X \mapsto \phi_1$$

称为指数映射,记为 $\phi_1 = \exp X$.

由于方程(6)是线性的,因此 $\phi_t = \exp tX$.

本书中多次用到上面 3 个结果,读者应熟练掌握. 下面通过对 l_n 与 L_n 取 r-导网来考察指数映射 $\exp: l_n \to L_n$.

对 l_n 中的任意 X 取 r-导网,它就是 X 在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 阶 Taylor 多项式. 记 $l_n^r = \{j^r X \mid X \in l_n\}$,并用 $j^r: l_n \to l_n^r$ 表标准投影. 显然 L_n^r 是 l_n^r 的开子集,因此 l_n^r 可等同于 Lie 群 L_n^r 在单位元处的切空间,并且 l_n^r 还可以赋予 Lie 代数结构. 从而定义 Lie 群 L_n^r 的指数映射

$$\exp: l_n^r \to L_n^r.$$

关于 Lie 代数 l_n^r 说明如下:首先向量空间 l_n 可赋予 Lie 代数结构,这是因为 l_n 中的成员是 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上的 C^∞ 向量场芽,因此对任意的 $X, Y \in l_n$,可形成 Lie 括号积 $[X, Y] \in l_n$. 其次,对 l_n^r 中的 X, Y,将它们视为 l_n 中成员,作 $[X, Y] \in l_n$,然后取 r-导网,$j^r[X, Y] \in l_n^r$. 即规定 l_n^r 中的 Lie 括号积 $\widetilde{[\,,\,]}: l_n^r \times l_n^r \to l_n^r$ 为 $\widetilde{[X, Y]} = j^r[X, Y]$. 读者可以验证 $\widetilde{[\,,\,]}$ 是双线性算子,满足反交换

律和 Jacobi 恒等式.

命题 1.3.3 下列图表可换,即 $j^r\circ\exp=\exp\circ j^r$.

$$\begin{array}{ccc} l_n & \xrightarrow{\exp} & L_n \\ {\scriptstyle j^r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^r} \\ l_n^r & \xrightarrow{\exp} & L_n^r \end{array}$$

证 任取 $X\in l_n$. 据定理 1.3.2,有 L_n 的单参数子群 $\{\phi_t\}$,使得 $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t|_{t=0}=X$. 令 $\phi_t=\exp tX$ 及 $\phi_t^r=j^r(\exp tX)\in L_n^r$. 显然 $\{\phi_t^r\}$ 是 L_n^r 的单参数子群且

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^r\Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}(j^r\phi_t)\Big|_{t=0} \\ &= j^r\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\right)\Big|_{t=0} \quad \left(\text{因}\frac{\partial}{\partial t}\text{ 与 }j^r\text{ 可换}\right) \\ &= j^rX\in l_n^r.\end{aligned}$$

记 $j^rX=\zeta$. 上式表明,ζ 是单参数子群 $\{\phi_t^r\in L_n^r\}$ 的无穷小生成元,因而

$$\phi_t^r=\exp t\zeta.$$

1.3.4 在群作用下的轨道切空间

设 $f\in\varepsilon_n$, $X\in l_n$,且 X 具有下列形式

$$X=\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad X_i\in\mathcal{M}_n,\quad i=1,\cdots,n.$$

据定理 1.3.2,积分向量场 X 可得到 L_n 的单参数子群 $\{\phi_t\}$,其中 ϕ_0 为恒同映射芽,且 $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\Big|_{t=0}=X$. 令

$$f_t=f\circ\phi_t,$$

它表示 ε_n 中一条经过 $f(=f_0)$ 的 C^∞ 道路. 计算

$$\frac{\partial}{\partial t}f_t\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

它可以看做是过 $f\in\varepsilon_n$ 的 C^∞ 道路 $t\mapsto f_t$ 在 f 处的切向量,称为向量场芽 X 对 $f\in\varepsilon_n$ 的无穷小作用.

又 $t\mapsto j^rf_t$ 表示 J_n^r 中经过 j^rf 的一条 C^∞ 道路,并且是在 Lie 群 L_n^r 作用下经过 j^rf 的一条道路,这是因为

$$j^rf_t = j^r(f\circ\phi_t) = j^rf\cdot j^r\phi_t$$

及 $\{j^r\phi_t\}$ 是 L_n^r 的单参数子群. $\frac{\partial}{\partial t}(j^rf_t)\Big|_{t=0}$ 表示上述道路在 j^rf 处的切向量,且

$$\frac{\partial}{\partial t}(j^rf_t)\bigg|_{t=0} = j^r\left(\frac{\partial}{\partial t}f_t\right)\bigg|_{t=0}$$

$$= j^r\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

从上面的分析,自然引入下列定义

定义 1.3.1 设 $f\in\varepsilon_n$.

(i) 在群 L_n 作用下经过 f 的轨道 $L_n\cdot f$ 在 f 处的切空间 $T_f(L_n\cdot f)$ 定义为

$$T_f(L_n\cdot f) = \left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\middle|\,X_i\in\mathscr{M}_n, i = 1,\cdots,n\right\}.$$

(ii) 在 Lie 群 L_n^r 作用下经过 j^rf 的轨道 $L_n^r\cdot j^rf$ 在 j^rf 处的切空间 $T_{j^rf}(L_n^r\cdot j^rf)$ 定义为

$$T_{j^rf}(L_n^r \cdot j^rf) = \left\{ j^r\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \middle| X_i \in \mathscr{M}_n, i = 1,\cdots,n \right\}.$$

定义 1.3.2 设 $f\in \varepsilon_n$. ε_n 中由 f 的一阶偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2\cdots,n)$生成的理想记为 $J(f)$,

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \varepsilon_n$$

叫做 f 的 Jacobi 理想.

这样一来,轨道 $L_n\cdot f$ 在 f 处的切空间可表为

$$T_f(L_n \cdot f) = \mathscr{M}_n \cdot J(f), \tag{7}$$

而轨道 $L_n^r\cdot j^rf$ 在 j^rf 处的切空间则写成

$$T_{j^rf}(L_n^r \cdot j^rf) = j^r(\mathscr{M}_n \cdot J(f)). \tag{8}$$

§1.4 Morse 芽

本节初步探讨函数芽在同构(即 Mather 的右等价)意义下的分类,主要讨论的是 Morse 芽.

命题 1.4.1 设 $f:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 一元函数芽. 假定 $f\in\mathscr{M}_1^k$ 且 $f\notin\mathscr{M}_1^{k+1}$,那么

(i) 当 k 为奇数时,f 同构于芽 $x\mapsto x^k$,

(ii) 当 k 为偶数时,f 同构于芽 $x\mapsto x^k$ 或 $x\mapsto -x^k$.

证 由条件,根据推论 1.1.1,有

$$f(0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = \cdots = \frac{\mathrm{d}^{k-1}f}{\mathrm{d}x^{k-1}}(0) = 0, \frac{\mathrm{d}^kf}{\mathrm{d}x^k}(0) \neq 0,$$

因此

$$f(x) = x^kg(x), g(0) \neq 0.$$

(i) k 为奇数,令

$$\phi(x) = x(g(x))^{1/k},$$

显然 $\phi'(0)\neq 0, \phi\in L_1$. 令 $y=\phi(x)$,则

$$(f\circ\phi^{-1})(y) = y^k.$$

(ii) k 为偶数,令

$$y = \phi(x) = x\,|\,g(x)\,|^{1/k},$$

则$(f\circ\phi^{-1})(y)=+y^k$ 或 $-y^k$,其中当 $g(0)>0$ 时,取"+"号;当 $g(0)<0$ 时,取"-"号. 此外,x^{2p} 与 $-x^{2p}$ 不同构. 证毕.

若 $f\in\varepsilon_1$ 在原点的各阶导数都为 0,则不能使用该命题. 该命题为非无穷次平坦的一元函数芽的分类提供一个判别法,并且依同构关系分类所得到的等价类有可数多个.

下面考虑多元函数芽,就两种情形进行讨论.

命题 1.4.2 设 $f\in\varepsilon_n$. 若 $f\in\mathscr{M}_n$ 且 $f\notin\mathscr{M}_n^2$,则 f 同构于一坐标函数芽. 譬如$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_1$.

证 据推论 1.1.1, f 至少有一偏导数在原点的值不为 0,不妨设$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0)\neq 0$. 定义 $\phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$如下:

$$z_1 = f(x_1,\cdots,x_n),$$

$$z_i = x_i,\quad i=2,\cdots,n,$$

$$\mathrm{D}\phi(0) = \left(\begin{array}{c|ccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0) & & * & \\ \hline & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right)\Bigg\}\, n-1,$$

(其中右下块为 $n-1$ 阶单位阵)

$\det\mathrm{D}\phi(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0)\neq 0$,故 $\phi\in L_n$,并且

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = z_1.$$

定义 1.4.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 芽. 若 $f\in\mathcal{M}_n^2$ 且 f 在 $\mathcal{M}_n^2/\mathcal{M}_n^3$ 中的投影是一个非退化的二次型，则称 f 为 Morse 芽，点 $0\in\mathbb{R}^n$ 为 f 的非退化临界点.

下面介绍 Morse 引理，我们采用 Milnor 的证法，见文献[57].

定理 1.4.1 (Morse 引理)若 $f\in\mathcal{M}_n^2$ 为 Morse 芽，则 f 同构于下列形式的芽：

$$(x_1,\cdots,x_n)\mapsto -x_1^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2, \qquad (1)$$

其中 λ 叫做 f 的指标.

证 由定理 1.1.3，f 可表为

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j q_{ij}(x), \quad q_{ij}\in\varepsilon_n.$$

可以假定 $q_{ij}=q_{ji}$，因为 f 可写为

$$f = \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{q}_{ij}, \quad \tilde{q}_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij}+q_{ji}),$$

又 $(\tilde{q}_{ij}(0)) = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)$ 是非退化的. 我们要证明存在 $\mathbb{R}^n$ 上保原点的局部微分同胚 ϕ，使得 $f\circ\phi$ 可表为式(1). 为此参照高等代数中化二次型为标准型的对角线化证明方法，关键的一步描述如下.

使用归纳法，假设在原点的某一邻域 U_1 内，存在坐标函数 $u_1,\cdots,u_n$，使得 f 可表示为

$$f = \pm u_1^2 \pm\cdots\pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j\geq r} u_i u_j Q_{ij}(u_1,\cdots,u_n),$$

其中 $(Q_{ij}(u))$ 为对称矩阵. 对后 $n-r+1$ 个坐标施行非退化线性

变换(如有必要的话),可假定 $Q_{rr}(0)\neq 0$. 令

$$g(u_1,\cdots,u_n)=\sqrt{|Q_{rr}(u_1,\cdots,u_n)|},$$

它在原点的某一较小邻域 $U_2\subset U_1$ 内是一个非零的 C^∞ 函数,现引入新坐标 $v_1,\cdots,v_n$,规定

$$v_i=u_i,\quad i\neq r,$$

$$v_r(u_1,\cdots,u_n)=g(u_1,\cdots,u_n)\left[u_r+\sum_{i>r}u_iQ_{ir}(u)\Big/Q_{rr}(u)\right].$$

据反函数定理,在原点的某一更小的邻域 $U_3\subset U_2$ 内,$v_1,\cdots,v_n$ 可取做坐标函数,并且容易验证 f 可表示为

$$f=\sum_{i\leqslant r}\pm v_i^2+\sum_{i,j>r}v_iv_j\widetilde{Q}_{ij}(v_1,\cdots,v_n).$$

依归纳法,定理得证.

对于 Morse 芽 $f\in\varepsilon_n$,它的 2-导网 j^2f 叫做 f 的 Hessian,是一个双线性对称函数.应指出的是,Morse 芽在群 L_n 作用下的分类可以归结为非退化二次型在一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 作用下的分类.后者由 Morse 芽的指标 λ 完全确定,其中 $\lambda=0,1,\cdots,n$,因此 Morse 芽按同构关系分为 $n+1$ 个等价类.

推论 1.4.1 非退化临界点是孤立临界点.

孤立临界点的含义为:设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集,$f:U\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数.我们知道点 $x_0\in U$ 为 f 的临界点,如果 f 的所有一阶偏导数在点 x_0 的值均为 0.而 x_0 为 f 的孤立临界点是指存在点 x_0 的开邻域 $U'\subset U$,使得对每一 $x\in U'-\{x_0\}$,至少有某个偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 在点 x 的值不为 0.

命题 1.4.3 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 为 Morse 芽当且仅当 f 的 Jacobi 理想 $J(f)=\mathscr{M}_n$.

证 f 为 Morse 芽$\Leftrightarrow f$ 的 Hessian$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(0)x_i x_j$ 为非退化二次型. 而

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2(q_{ij}(0)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

因此 Q 为非退化二次型$\Leftrightarrow \mathscr{M}_n = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\rangle \varepsilon_n$. 因为$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial Q}{\partial x_i} \bmod \mathscr{M}_n^2$, 据命题 1.1.1,

$$\mathscr{M}_n = \left\langle \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right\rangle \varepsilon_n \Leftrightarrow \mathscr{M}_n = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \varepsilon_n,$$

因此 f 为 Morse 芽$\Leftrightarrow \mathscr{M}_n = J(f)$. 证毕.

下面给出几个退化临界点的例子,并绘出它们的草图. 由此可见,函数在退化临界点附近,形态多姿多采、千变万化,对它们进行研究是奇点理论的任务.

(a) $f(x)=x^3$. 原点为退化临界点.

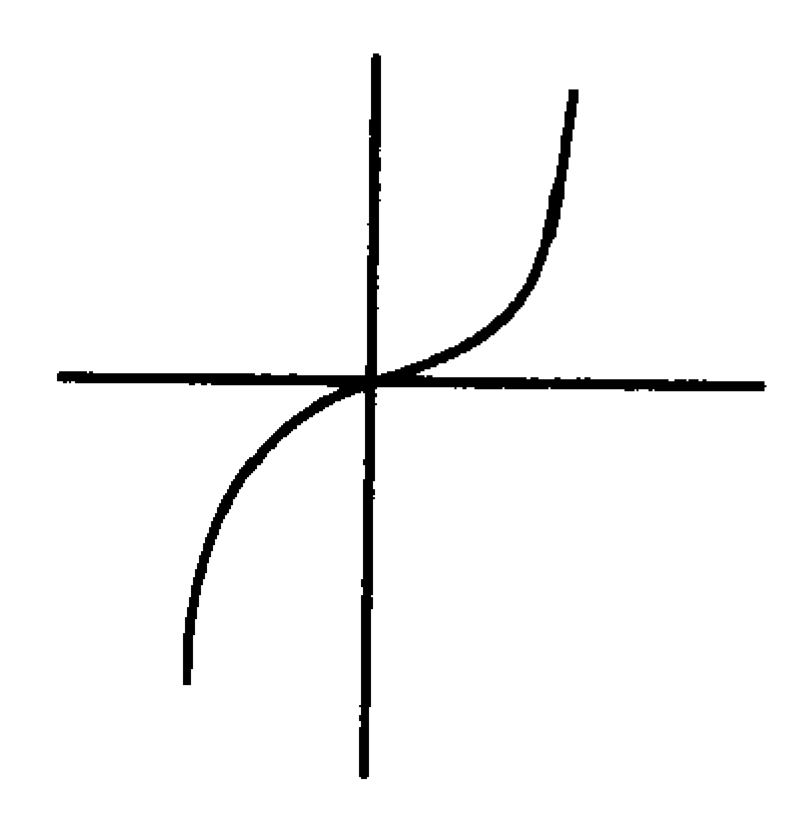


图 1.2

(b) $f(x)=e^{-1/x^2}\sin^2\frac{1}{x}$. 原点是退化临界点，而且是非孤立的.

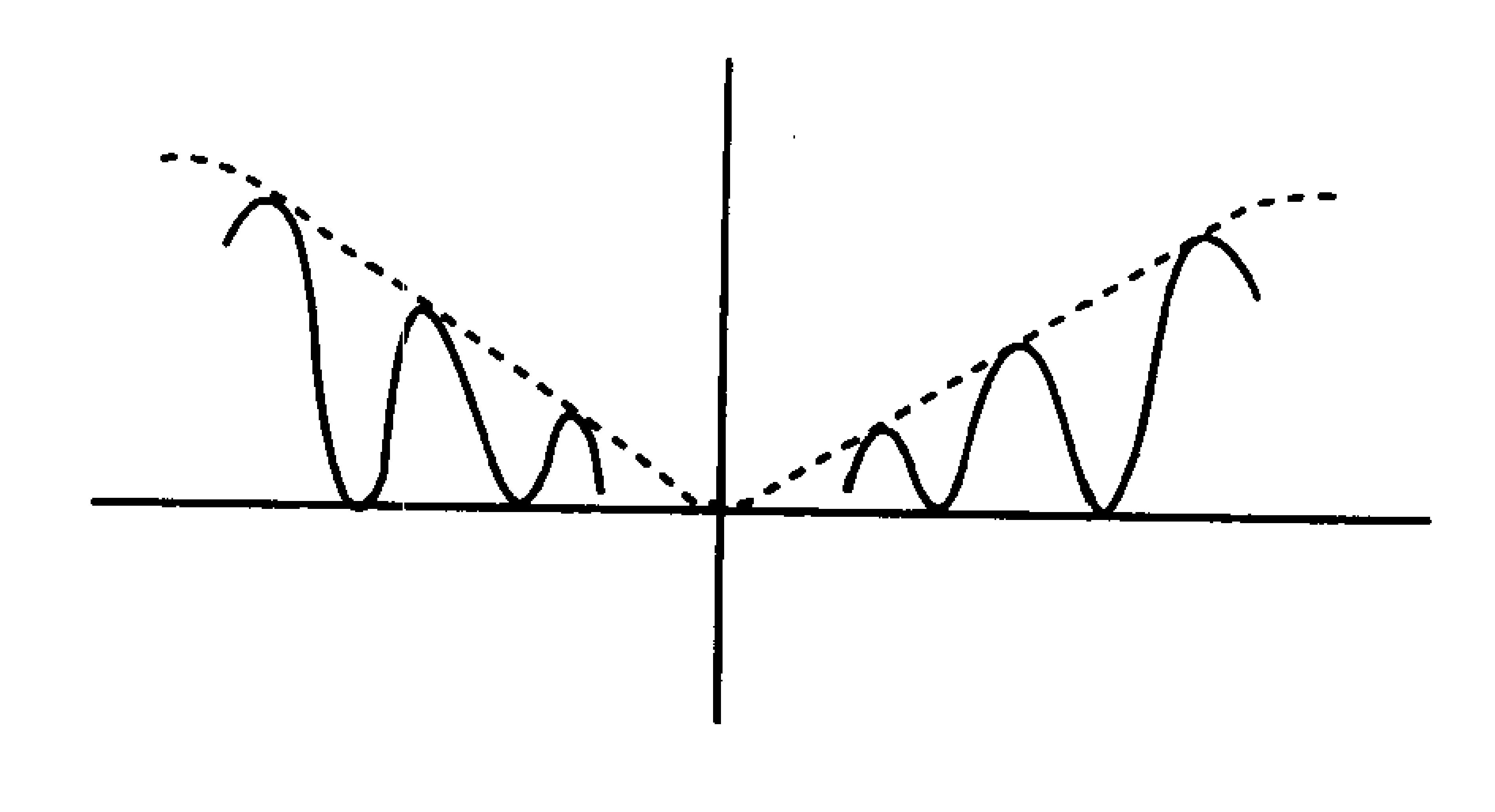


图 1.3

(c) $f(x,y)=x^3-3xy^2$，(0,0)为退化临界点(猴鞍形).

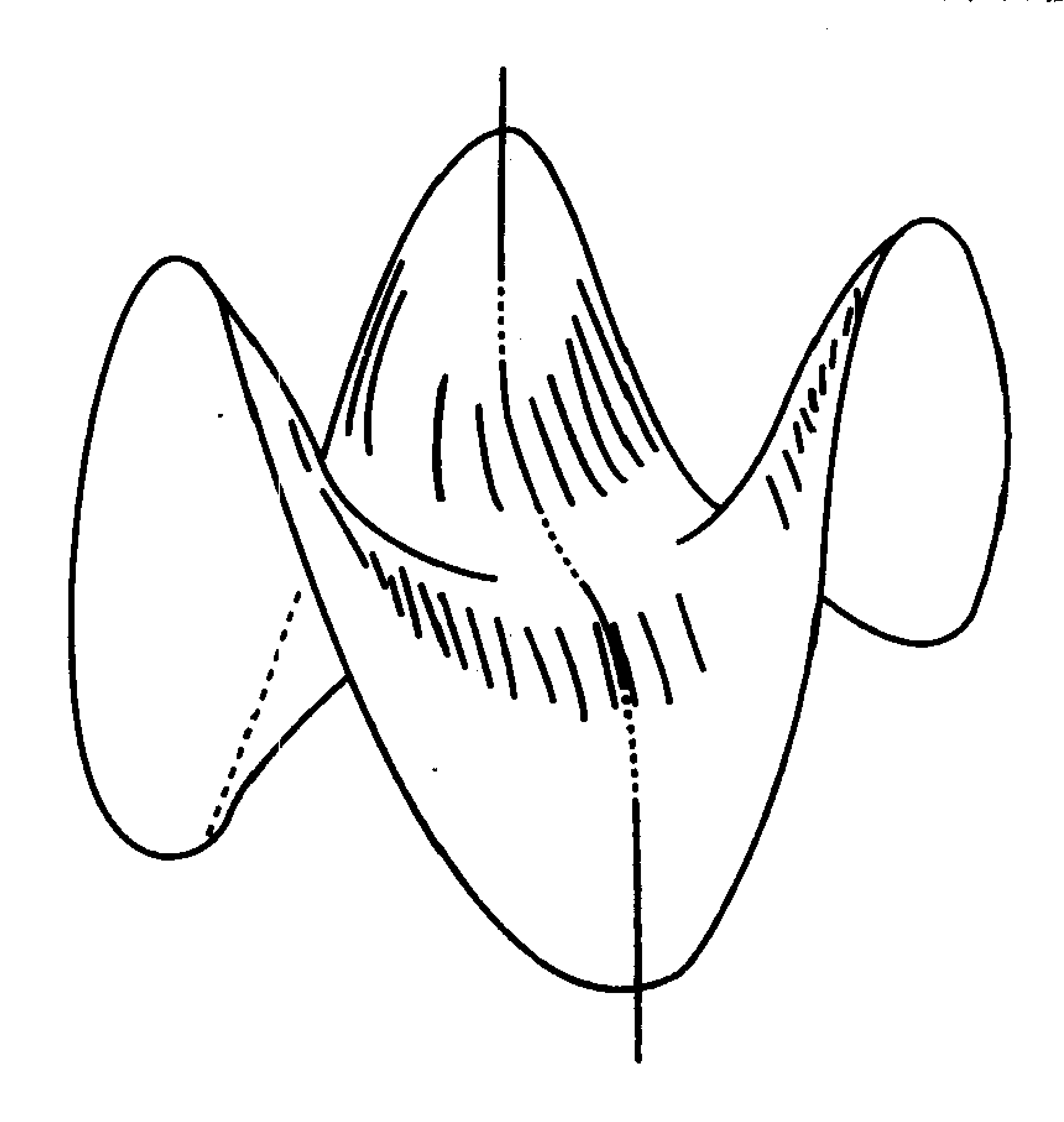


图 1.4

(d) $f(x,y)=x^2$,退化临界点集为 x 轴,它是$\mathbb{R}^2$ 中的子流形.

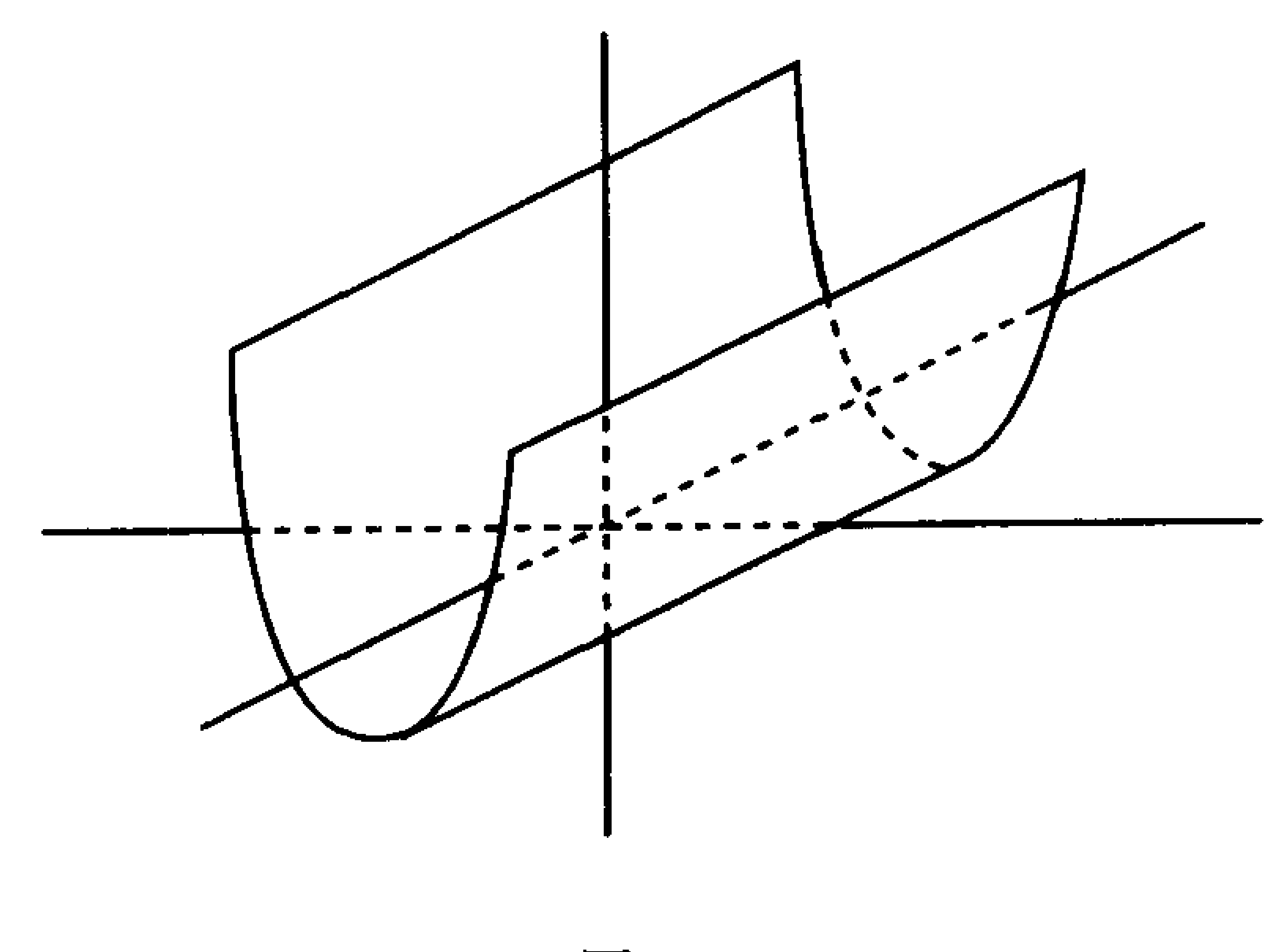


图 1.5

(e) $f(x,y)=x^2y^2$,退化临界点集由 x 轴与 y 轴的并组成,它不是$\mathbb{R}^2$ 中的子流形.

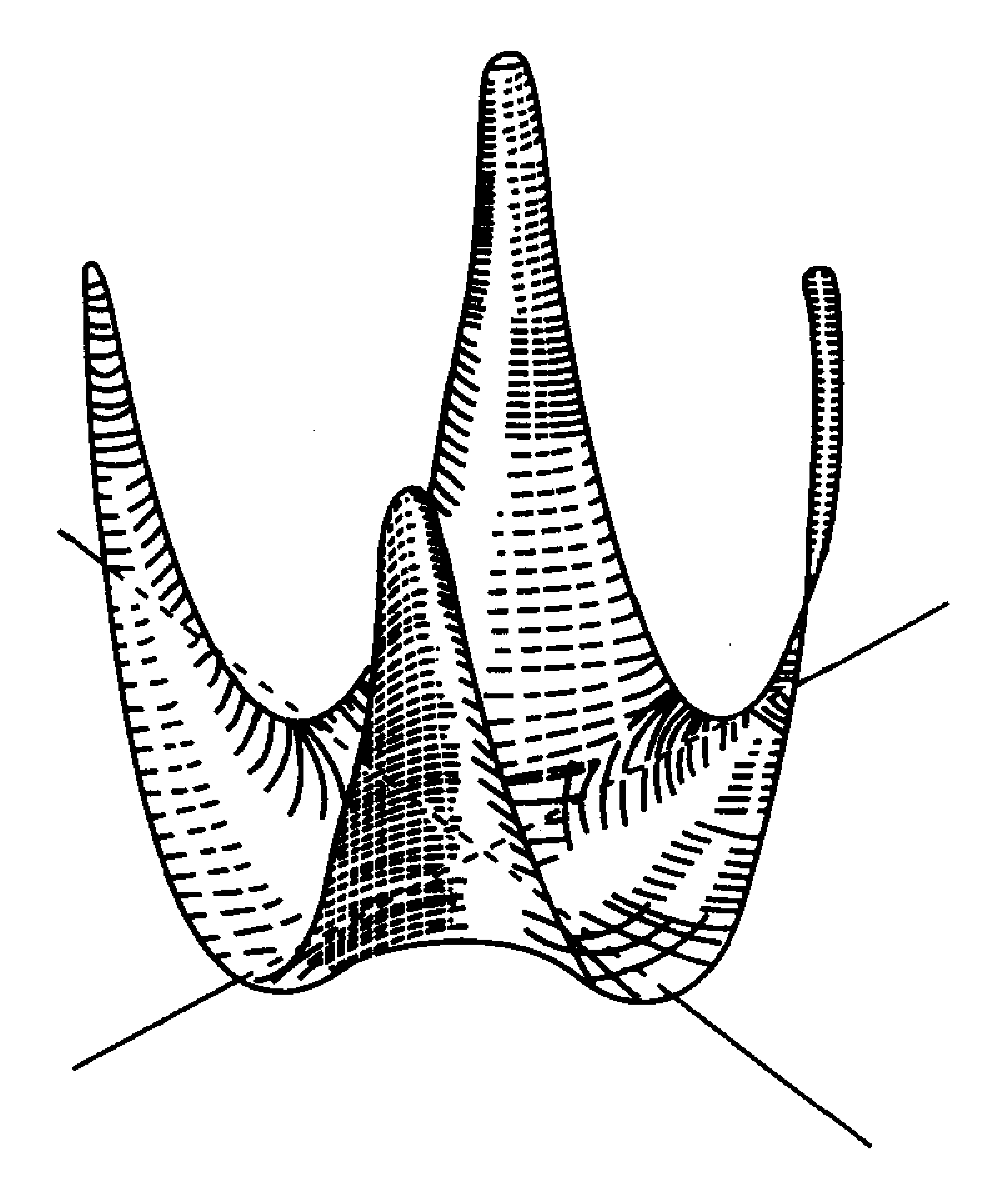


图 1.6

第二章 横截性

在奇点理论研究中,横截性是重要的基本概念,横截性定理则是非常有力的研究工具.在§2.1中我们从几何直观入手引入横截性,包括二子流形横截相交以及光滑映射与一子流形横截,建立了它们之间的内在联系.由于横截性是正则性概念的延伸,§2.2介绍了著名的Sard定理.以此为基础,§2.3和§2.4两节讨论了各种形式的横截性定理,包括参数横截性定理,导网形式的横截性定理等.最后一节应用横截性讨论了Thom一阶奇点集,为进一步学习Thom-Boardman奇点打下基础.读者从§2.5中的一些结果可以看到横截性这一工具的威力.

§2.1 横截性概念

反映所研究的对象横截相交或说处于一般位置的概念在奇点理论中是非常重要的.最简单的情形是观察向量空间 V 的两个子空间 V_1 与 V_2,我们说 V_1 和 V_2 横截相交,如果它们的向量和为整个空间 V,即 $V_1+V_2=V$.

由于微分流形的切空间是向量空间,切映射为切空间之间的线性映射,所以可以定义两个子流形的横截性以及微分流形之间的可微映射与像空间中一子流形的横截性.

定义 2.1.1 设 M_1,M_2 是$\mathbb{R}^n$ 中的两个微分子流形.M_1 与 M_2 在点 $x\in M_1\cap M_2$ 横截相交,如果它们在点 x 处的切空间 T_xM_1 和 T_xM_2 在$\mathbb{R}^n$ 中横截相交,即

$$T_xM_1+T_xM_2=\mathbb{R}^n.$$

子流形 M_1 和 M_2 在$\mathbb{R}^n$ 中横截相交是指 M_1 与 M_2 在 $M_1\cap M_2$

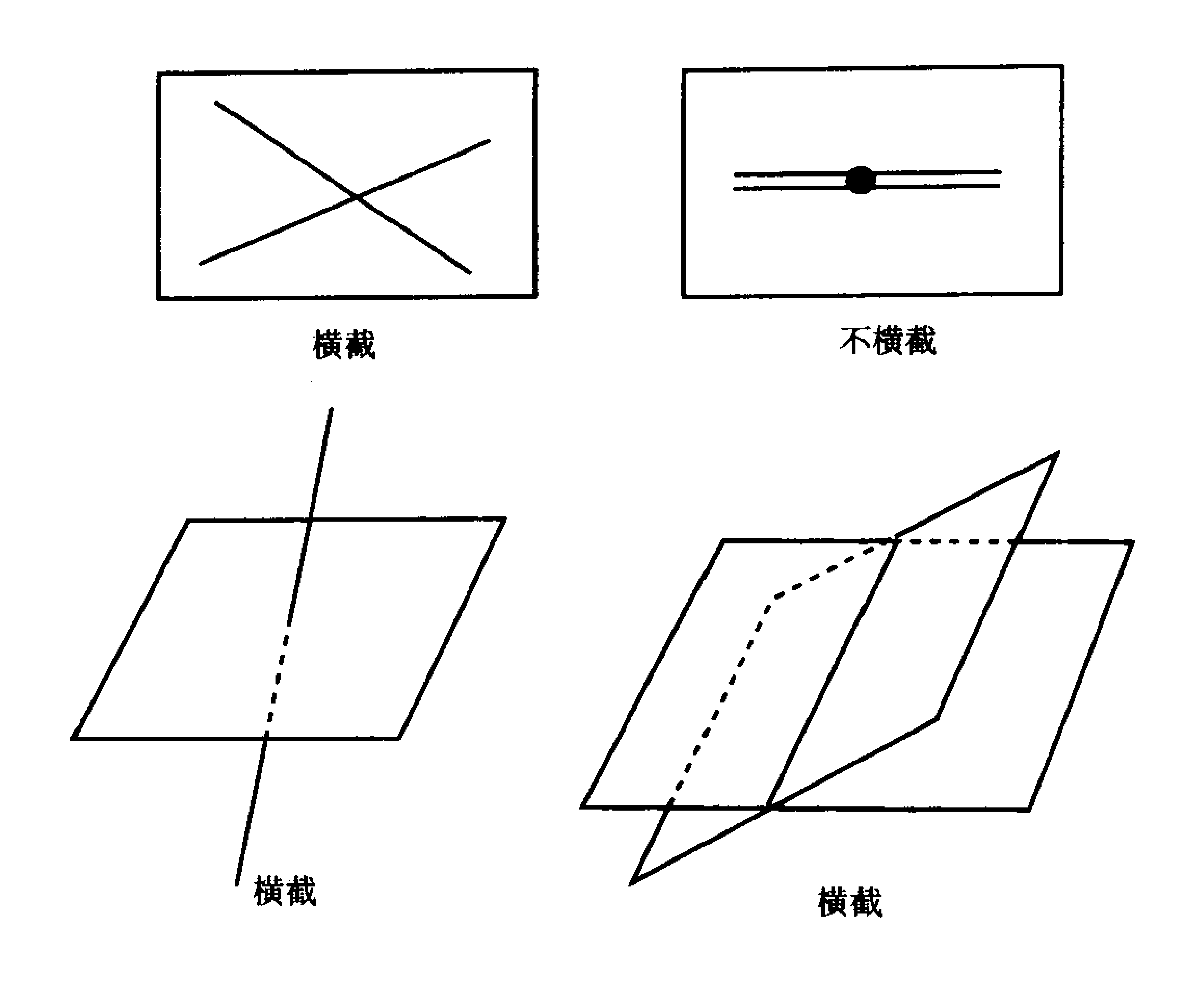


图 2.1

中的每一点处均横截相交.

对于 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$的情形,约定 M_1 和 M_2 是横截的.

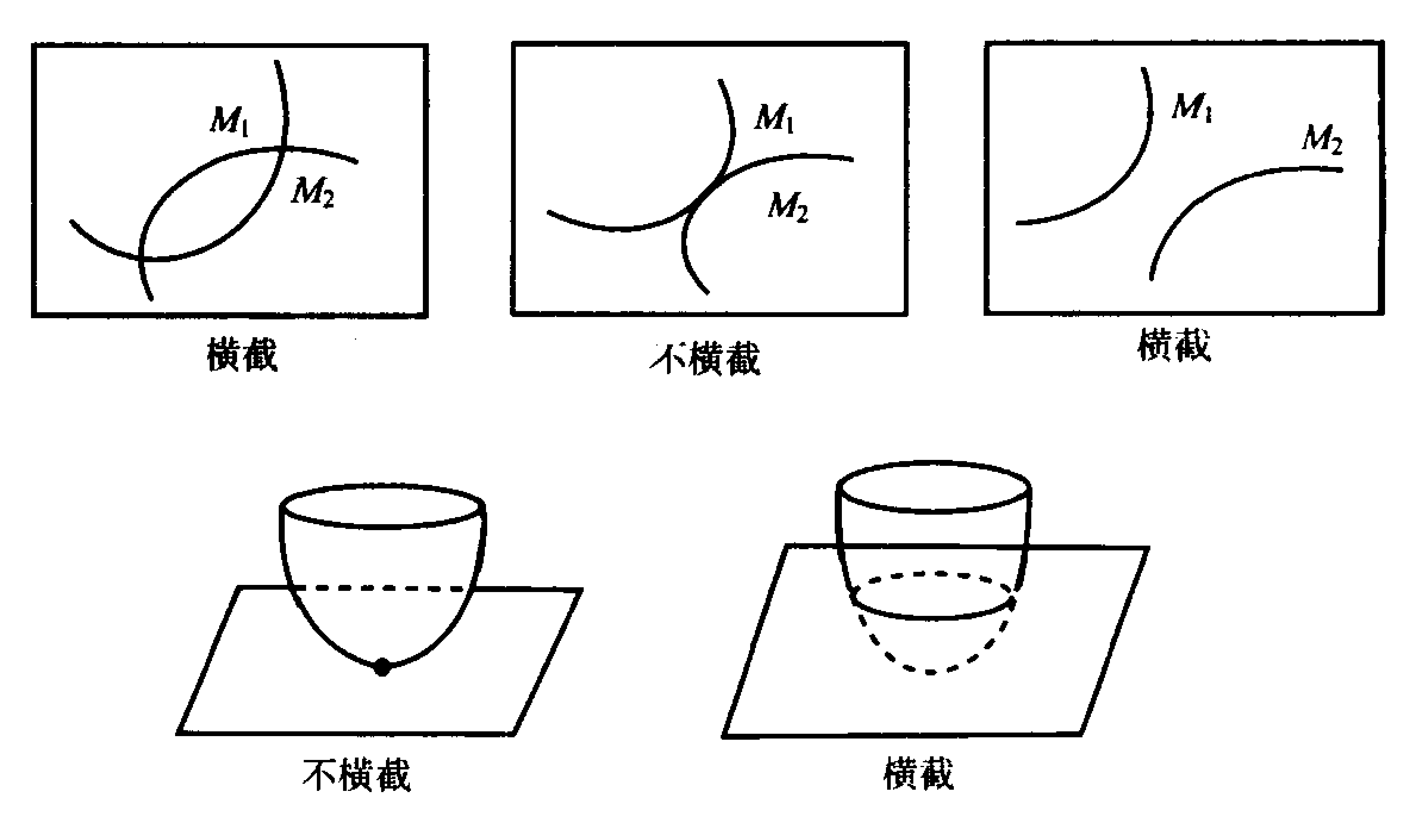


图 2.2

定义 2.1.2 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，S 为 $\mathbb{R}^p$ 的子流形. 我们说 f 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 与 S 横截，如果 $f(x) \notin S$，或 $f(x) \in S$ 且满足下列条件：

$$\mathrm{D}f(x)(\mathbb{R}^n) + T_{f(x)}S = \mathbb{R}^p,$$

其中 $\mathrm{D}f(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 表 f 在点 x 的微分，它是线性映射. $T_{f(x)}S$ 表示子流形 S 在点 $f(x)$ 处的切空间.

若映射 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的每一点均与 S 横截，则称 f 与 S 横截，记为 $f \pitchfork S$. 而把 f 在点 x 与 S 横截记为 $f \pitchfork_x S$.

两种特殊情形：

情形 1 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为淹没，于是对每一 $x \in \mathbb{R}^n$，$\mathrm{D}f(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为满射，那么 f 与 $\mathbb{R}^p$ 中的任意子流形 S 都横截.

情形 2 $\mathbb{R}^p$ 中子流形 S 仅由一点 y 组成，那么 $f \pitchfork \{y\}$ 当且仅当 y 为 f 的正则值.

"C^∞ 映射与一子流形横截"和"二子流形相横截"之间有着密切联系.

命题 2.1.1 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，S 为 $\mathbb{R}^p$ 的子流形. $f \pitchfork S$ 当且仅当 $\mathrm{graph} f$ 和 $\mathbb{R}^n \times S$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 中相横截.

证 首先说明

$$\mathrm{graph} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid y = f(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 中的一个 n 维微分子流形. 事实上，定义映射

$$F:\mathbb{R}^n \to \mathrm{graph} f, \quad x \mapsto (x, f(x)),$$

易见 F 是 C^∞ 的. $F^{-1} = \pi|\mathrm{graph} f$，其中 $\pi:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 为自然投影，因而 F^{-1} 也是 C^∞ 的. 这说明 F 是一个微分同胚. 又

$$\mathrm{D}F(x) = (1, \mathrm{D}f(x)),$$

因此 $\mathrm{graph} f$ 在任意点 $(x, f(x))$ 处的切空间恰好是 $\mathrm{graph}\,\mathrm{D}f(x)$.

按照定义，graph$f$ 和$\mathbb{R}^n\times S$ 在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中相横截是指对所有点 $z=(x,y)$，其中 $x\in\mathbb{R}^n$，$y=f(x)\in S$，有

$$T_z(\mathrm{graph}f)+T_z(\mathbb{R}^n\times S)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,$$

即

$$\mathrm{graph}Df(x)+\mathbb{R}^n\times T_{f(x)}S=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,$$

显然它等价于

$$Df(x)(\mathbb{R}^n)+T_{f(x)}S=\mathbb{R}^p.$$

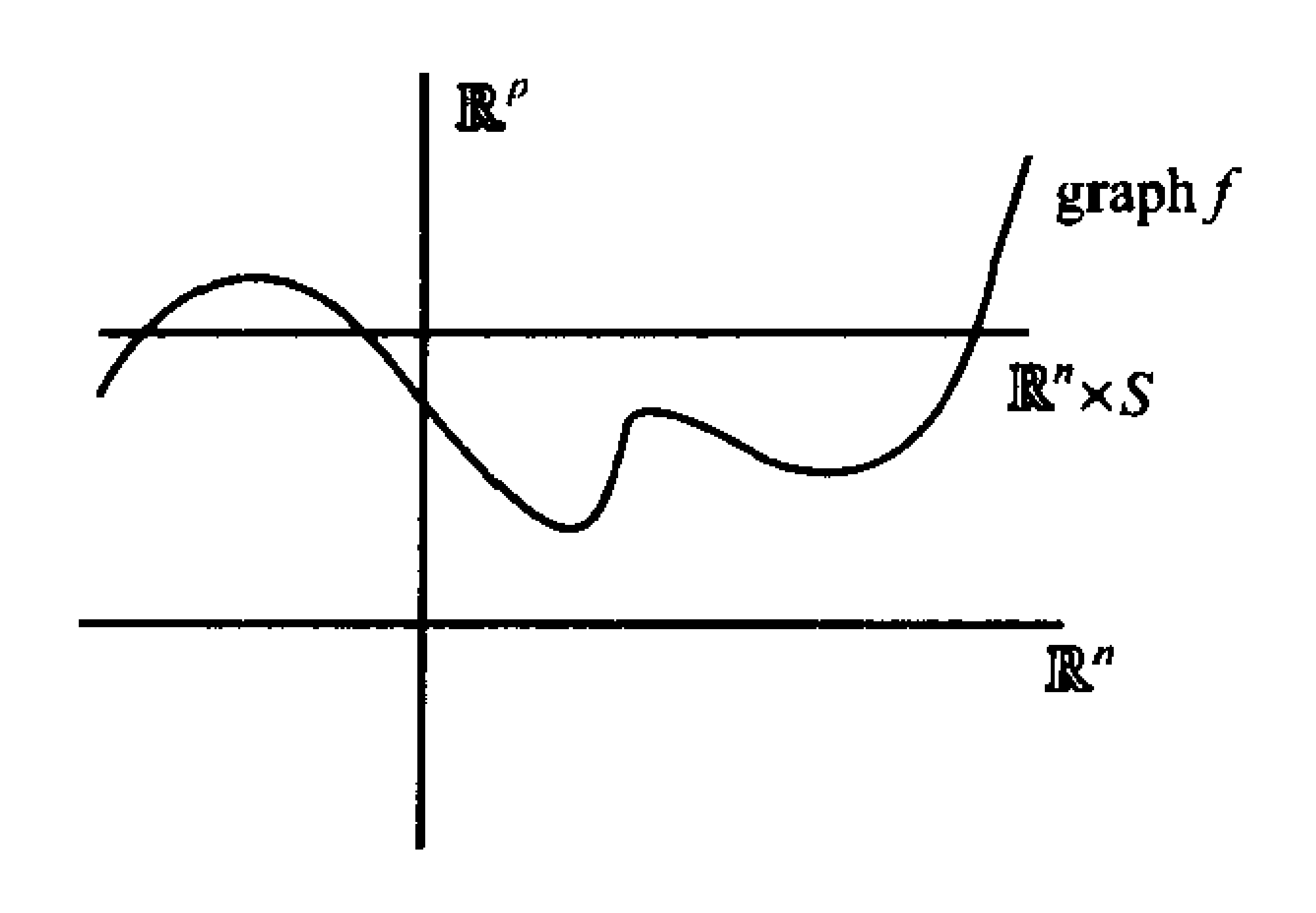


图 2.3

定理 2.1.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，S 为$\mathbb{R}^p$ 中余维为 q 的子流形(因而 S 的维数是 $p-q$)．如果 f 与 S 横截，那么 $M=f^{-1}(S)$是$\mathbb{R}^n$ 中余维为 q 的子流形或为空集．此外，在$\mathbb{R}^n$ 中任取点 x，若 $y=f(x)\in S$，则有 $T_xM=(Df(x))^{-1}(T_yS)$．

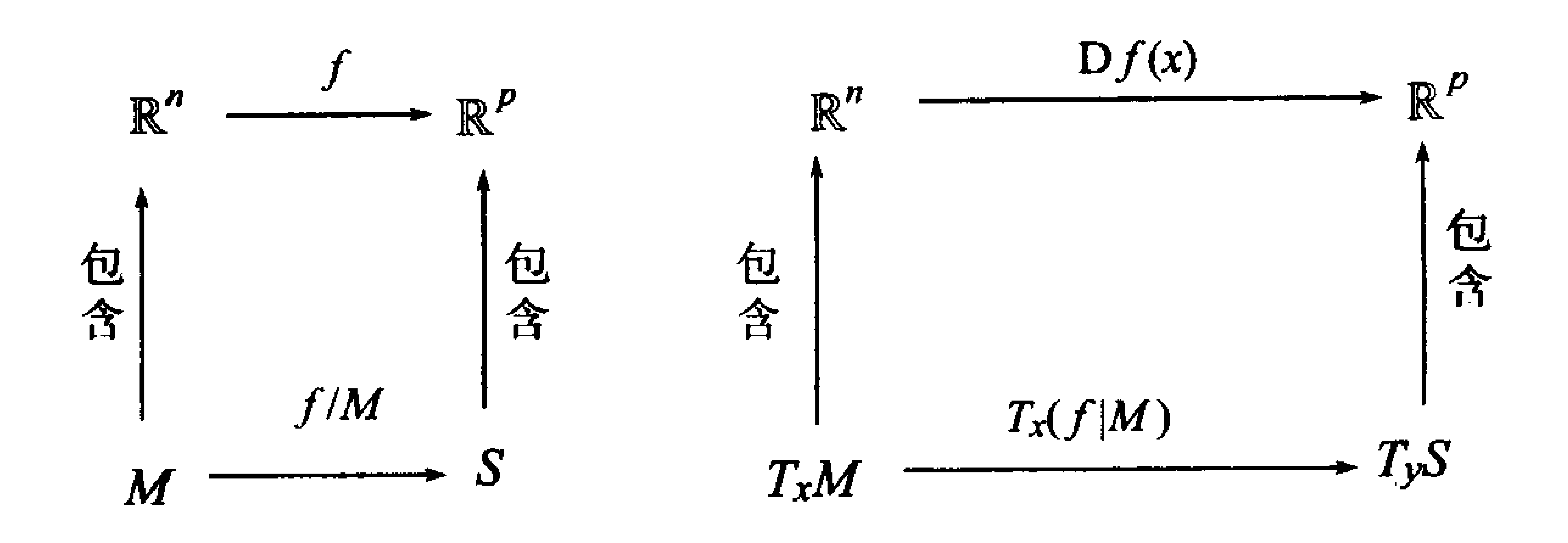
证 假定 $f^{-1}(S)\neq\varnothing$．取 $x\in f^{-1}(S)$，则 $f(x)=y\in S$．因 S 是$(p-q)$维子流形，故存在 y 在$\mathbb{R}^p$ 中的开邻域 V 以及微分同胚ϕ，使得

$$\phi(V\cap S)=\phi(V)\cap\mathbb{R}^{p-q},$$

这里$\mathbb{R}^{p-q}$看做是$\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^{p-q}=\mathbb{R}^p$ 的子空间$\{0\}\times\mathbb{R}^{p-q}$．记$(V,\phi)$的

坐标函数为 $v_1,\cdots,v_p$,并设 $\pi:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ 将$\mathbb{R}^p$ 中的点投影到它的前 q 个分量上,则 $V\cap S=\phi^{-1}\circ\pi^{-1}(0)$,这里 0 表$\mathbb{R}^q$ 的原点,并且 $f^{-1}(V\cap S)=(\pi\circ\phi\circ f)^{-1}(0)$.因 f 与 S 在点 $x\in f^{-1}(S)$横截,故 $\pi\circ\phi\circ f$ 在点 x 处的秩为 q,这说明$\mathbb{R}^q$ 中的原点是 $\pi\circ\phi\circ f$ 的正则值.据定理 1.2.4,$(\pi\circ\phi\circ f)^{-1}(0)=f^{-1}(V\cap S)$是$\mathbb{R}^n$ 中的$(n-q)$维子流形.由于点 $x\in f^{-1}(S)$是任取的,所以 $f^{-1}(S)$是$\mathbb{R}^n$ 中余维为 q 的子流形.

现证定理中第二个断言.



由左上图可换性可导出右上图的可换性,因此 $T_xM\subset(Df(x))^{-1}(T_yS)$.要证明这两个向量空间相等,只需证明它们的维数相等.为此考虑线性映射

$$\alpha = Df(x)\Big|(Df(x))^{-1}(T_yS):(Df(x))^{-1}(T_yS)\to T_yS,$$

易见 $\mathrm{Ker}\alpha=\mathrm{Ker}Df(x)$,$\mathrm{Im}\alpha=T_yS\cap Df(x)(\mathbb{R}^n)$.因为线性映射的定义域的维数等于核空间维数与像空间维数之和,再利用横截性定义便可导出所要求的维数等式(留作简单练习).

例 1 设 $A=(a_{ij})$是 n 阶可逆对称矩阵.考虑 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$x\mapsto\langle Ax,x\rangle$,其中$\langle,\rangle$表$\mathbb{R}^n$ 上的通常内积.f 在点 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的微分是线性映射 $v\mapsto 2\langle Ax,v\rangle$,因而 1 是 f 的一个正则值并且 $f^{-1}(1)$或为空集或为$\mathbb{R}^n$ 中的$(n-1)$维微分子流形.当 $f^{-1}(1)$

$\neq\varnothing$时，$f^{-1}(1)$是有心二次曲面 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = 1$，这个二次曲面在点 x 处的切空间就是 f 在点 x 的微分的核，即与向量 Ax 垂直且通过原点的超平面.

特例. 1）A 为 n 阶单位矩阵，则 $f^{-1}(1)$为$(n-1)$维球面 S^{n-1}，它是$\mathbb{R}^n$ 中的$(n-1)$维光滑子流形，该球面在点 $x\in S^{n-1}$处的切空间是过原点且垂直于向量 x 的超平面.

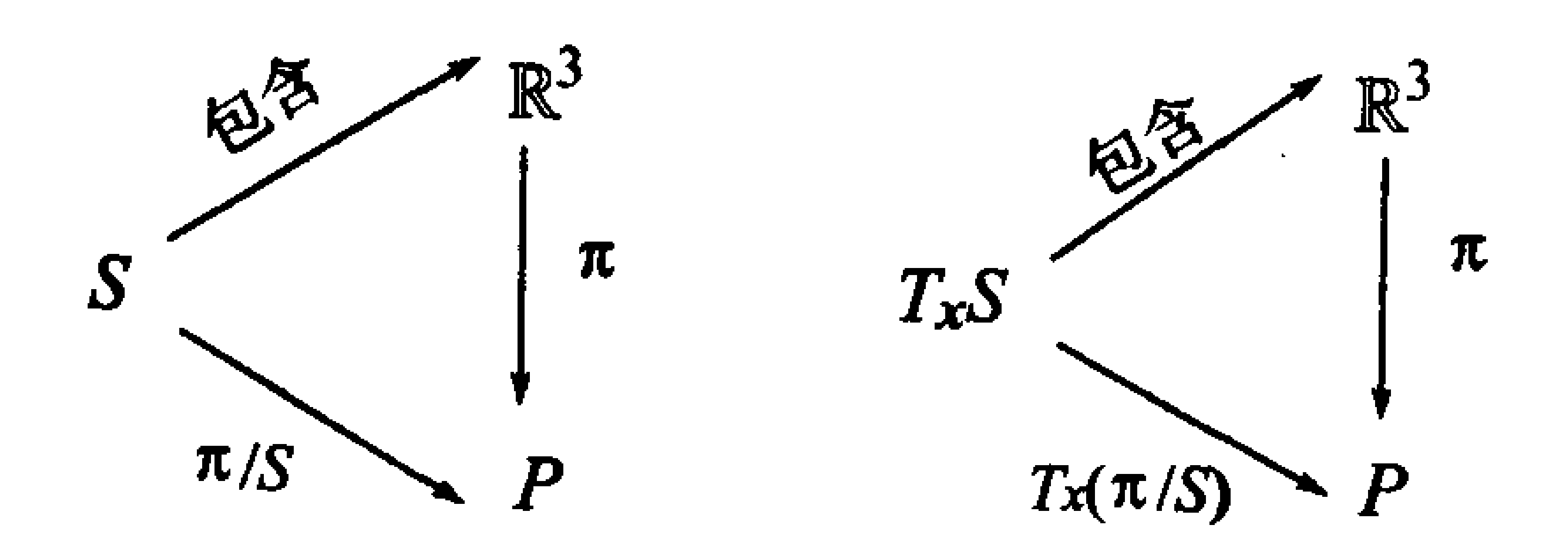
2）取 $n=3$，则椭球面、椭圆柱面、双曲柱面及双曲面均为二维微分子流形.

例 2 设 C^{∞} 映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 满足下列条件：$\forall x\in f^{-1}(0)$，$\operatorname{rank}Df(x)=1$. 据定理 2.1.1，$f^{-1}(0)$为$\mathbb{R}^2$ 中的一维光滑子流形，即平面上的光滑曲线. 例如，$f(y,z)=(y-a)^2+z^2-b^2(a>b>0)$便满足上述条件. $(y-a)^2+z^2=b^2$ 表示一维子流形 $f^{-1}(0)$，它是 yOz 平面上以$(a,0)$为圆心，b 为半径的圆周.

令 $F(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2},z)$，则 $F:\mathbb{R}^3-\{0\}\to\mathbb{R}$ 也具有类似性质：F 的微分在 $F^{-1}(0)$的每一点处的秩等于 1，因而 $F^{-1}(0)$是$\mathbb{R}^3$ 中的二维光滑子流形，它是由上述圆周绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面，即环面，它的方程是

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2).$$

现插入一段曲面在一平面上投影的知识，因它有助于对本节余下部分的直观理解. 取定一光滑曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$（即$\mathbb{R}^3$ 中的二维微分子流形）及过原点的平面 P，设 π 表示到平面 P 上的正投影，考



虑 $\pi|S$ 的奇点集.不妨将 P 设想成水平的,与 P 正交的直线则是垂直的.

任取 $x\in S$.由上述左图的可换性导致右图也是可换的,这里 $T_x(\pi|S)$表示 $\pi|S$ 在点 x 处的切映射.若 x 是 $\pi|S$ 的奇点,则 π 必将 T_xS 映为 P 的一个真子空间,因而切平面 T_xS 应该是"垂直"的.一般来说,$\pi|S$ 的奇点集为 S 的一条曲线,它被投影成 P 内的一条曲线,即分歧集.

例 3 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(u=x,v=y^3-xy)$为 Whitney 尖点映射,则 f 的奇点集

$$\Sigma f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\mathrm{D}f(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -y & 3y^2-x\end{pmatrix}\text{的秩}<2\right\}$$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x=3y^2\},$$

它是 xOy 平面上的抛物线.这条抛物线在 f 下的像是分歧集,方程为 $4u^3-27v^2=0$,称为尖点三次线.

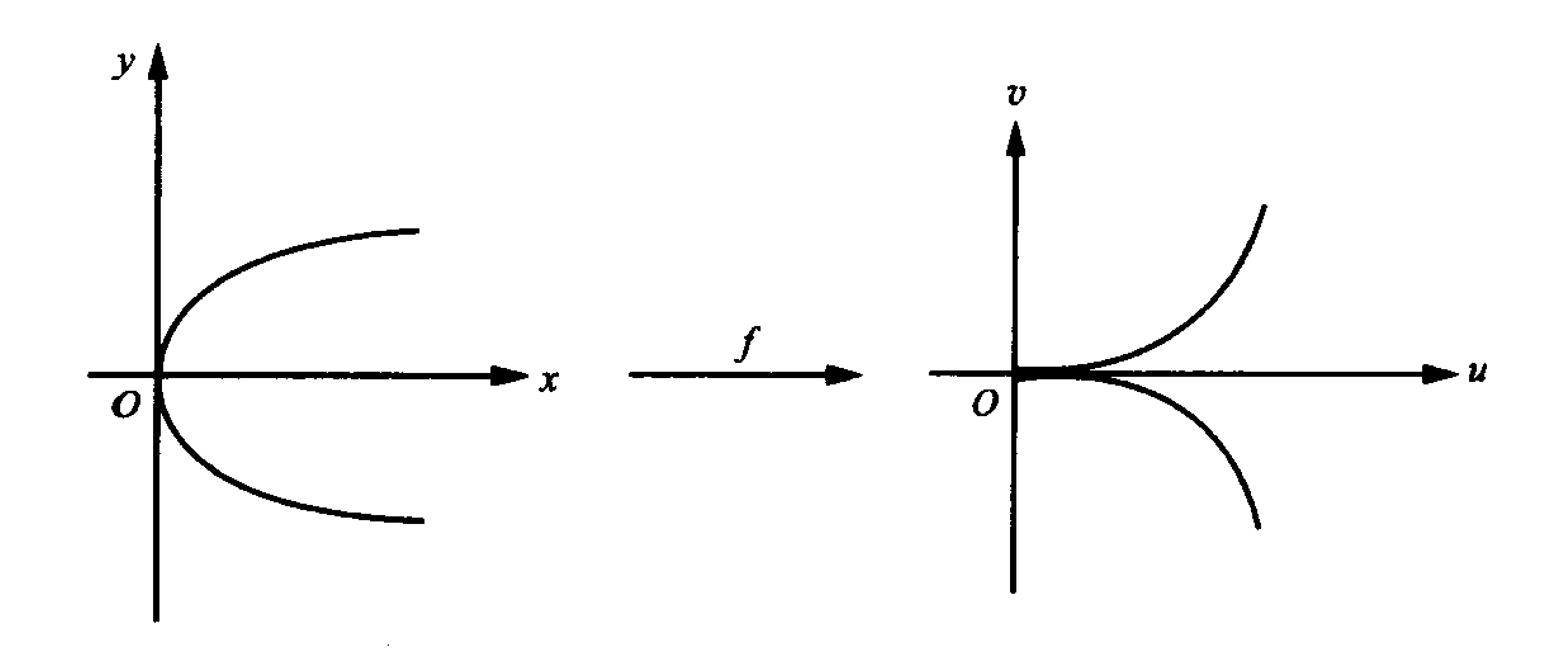


图 2.4

从几何直观来看,最好将 Whitney 尖点映射看做下面两个映射 g 和 π 的复合,其中

$$g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (u,v,w),$$

这里 $u = x$, $\quad v = y^3 - xy$, $\quad w = y$,

$$\pi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v,w) \mapsto (u,v).$$

g 的像是曲面 S,它由方程 $F = v - w^3 + uw = 0$ 所确定. 据定理 2.1.1,S 是$\mathbb{R}^3$ 中二维光滑子流形. 将折叠曲面 S 到平面 $w = 0$ 上的投影记为 π.

S 的切平面是 F 的微分的核, 因而垂直于向量 $\left(\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v},\frac{\partial F}{\partial w}\right) = (w, 1, u - 3w^2)$. 当这一向量位于平面 $w = 0$ 时,切平面是垂直的,也就是当 $u = 3w^2, v = -2w^3$ 时,切平面垂直于平面 $w = 0$. 于是 $\pi|S$ 的奇点集是"折叠曲线",其参数方程为 $u = 3t^2, v = -2t^3, w = t$,该曲线是三次挠线,经 π 投影变为尖点三次线.

例 4 考虑例 2 中的环面 S 到平面 $y = z$ 上的投影 π,其中 S 由方程

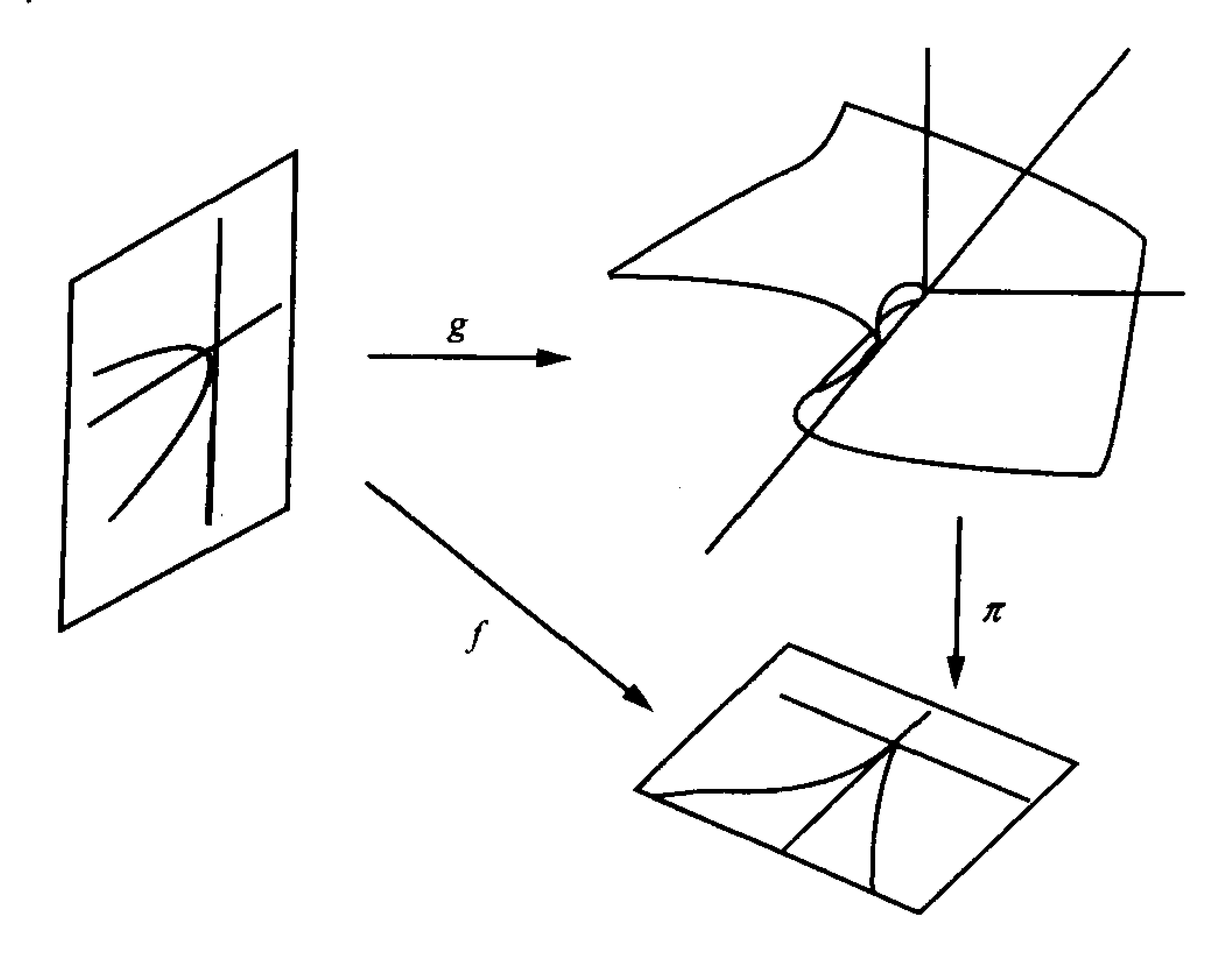


图 2.5

$$G=(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2-4a^2(x^2+y^2)=0 \quad (1)$$

给定. S 的切平面是微分 DG 的核,即与向量$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)$相垂直的平面. S 中的点为 $\pi|S$ 的奇点的条件是向量$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)$,位于平面 $y=z$,因而$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial z}$. 经计算得

$$(z-y)(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)+2a^2y=0, \quad (2)$$

因此奇点集 $\Sigma(\pi|S)$由方程(1)和(2)确定,它是次数分别为 4 和 3 的两张代数曲面的交,因而是一条次数为 12 的空间代数曲线,该曲线在平面 $y=z$ 上的投影便是分歧集. 如果环面是透明的(例如用玻璃制成的),将它投影到平面上便看到图 2.6 所绘的可见轮廓,它有 4 个尖点型奇点.

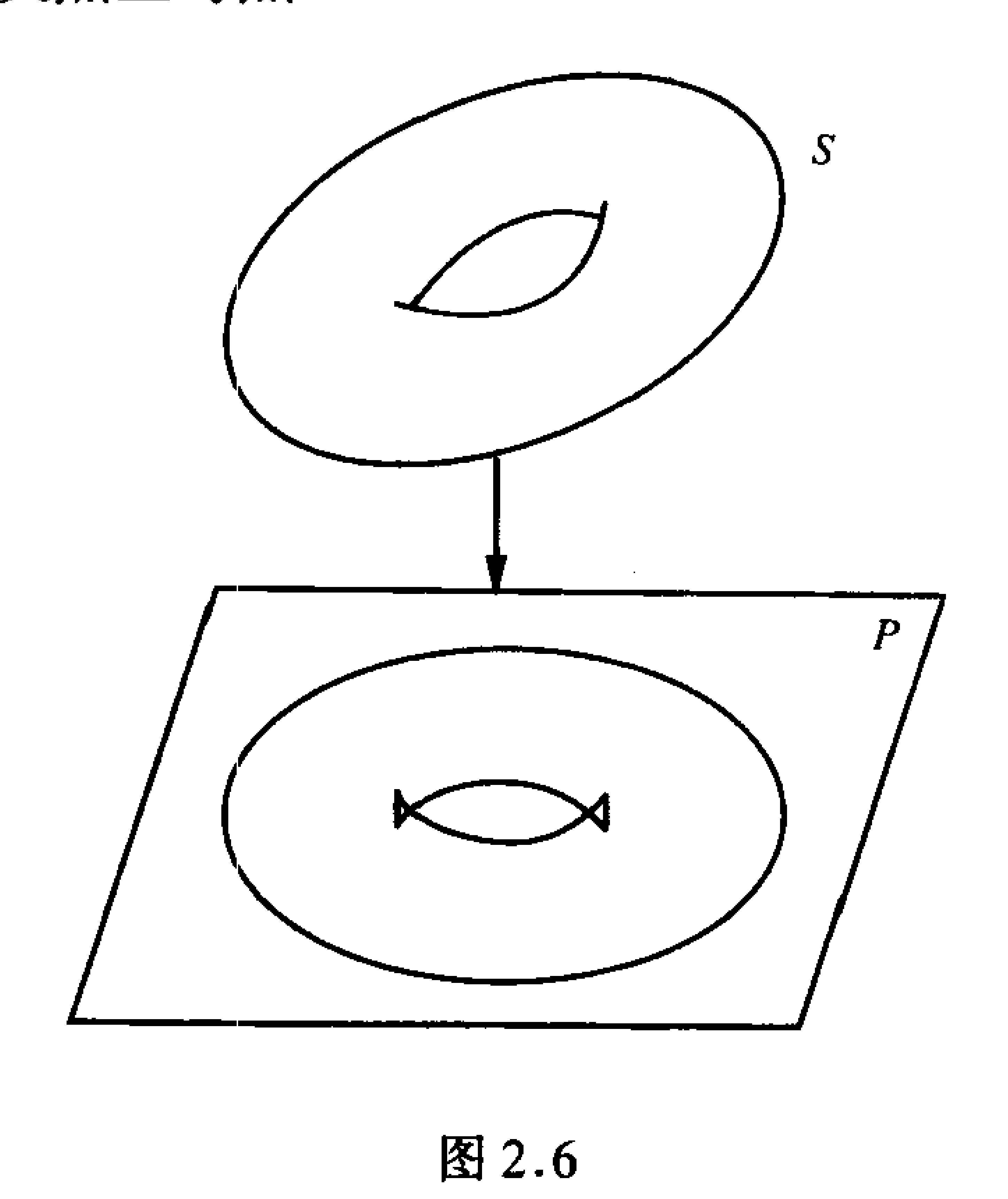


图 2.6

§2.2 Sard 定理

长期以来,人们关心由各种方程表示的曲线和曲面. 设 U 为

$\mathbb{R}^n$ 中的开集，$f:U\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射．那么对任意 $b\in\mathbb{R}^p$，方程

$$f(x) = b$$

的解集 $f^{-1}(b)$为$\mathbb{R}^n$ 中的闭集，一般来说可能相当复杂．进而问：如果 $f^{-1}(b)$非空，那么哪些 b 能保证$f^{-1}(b)$为 C^∞ 流形呢？Sard 定理给出了满意的回答．该定理可以简洁地叙述为：光滑映射的临界值集是一个零测度集．作为 Sard 定理的一个应用，上述问题的结论是，对于几乎所有的 $b_i\in\mathbb{R}(i=1,\cdots,p)$（这意指 $b=(b_1,\cdots,b_p)$取自$\mathbb{R}^p$ 中除去一个零测度集以外的所有点），非线性方程

$$f_i(x) = b_i,\quad i = 1,\cdots,p$$

如果有解，则它的解集为$\mathbb{R}^n$ 中一个$(n-p)$维微分子流形．

本节主要证明 Sard 定理．

2.2.1 零测度集与 Fubini 定理

定义 2.2.1 设 C 为$\mathbb{R}^n$ 的子集．若对任给的 $\varepsilon>0$，存在可数个 n 维方体$\{W_i\}$，使得 $C\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}W_i$，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|W_i|<\varepsilon$，则称集 C 的测度为 0．这里$|W|$表方体 W 的体积，即若 $W=\{x\in\mathbb{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, b_i-a_i=l, i=1,\cdots,n\}$，则$|W|=l^n$．

断言 若 $C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}C_i$，且每一 C_i 的测度为 0，则 C 的测度亦为 0．事实上，由 $C_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}W_j^i$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty}|W_j^i|<\frac{\varepsilon}{2^i}$，有 $C\subset\bigcup\limits_{i,j}W_j^i$ 且 $\sum\limits_{i,j}|W_j^i|<\sum\limits_{i}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon$．因此可数个零测度集的并仍为零测度集．

引理 2.2.1 设 U 为$\mathbb{R}^n$ 中开集，$C\subset U$ 为零测度集．若 $f:U\to\mathbb{R}^n$为 C^∞ 映射，则 $f(C)$的测度为 0．

证 因 U 可表为可数个有界闭球的并，故可假定 C 包含在一个有界闭球即紧致球内．并且由 n 维方体构成的C 的覆盖包含在稍为大一点的紧致球K 内，且 $K\subset U$．

由微积分学的中值定理知，对任意 $x,x+h\in K$，存在常数 c，

使得

$$\left|f(x+h)-f(x)\right|\leqslant c\left|h\right|.$$

当边长为 a 的方体 $W\subset K$ 时，对 $x,x^0\in W$，有 $|x-x^0|\leqslant\sqrt{n}a$，因此

$$\left|f(x)-f(x^0)\right|\leqslant c\cdot\sqrt{n}a,$$

从而 $f(W)$ 位于体积为 $(2\sqrt{n}c)^n|W|$ 的 n 维方体内，而常数 $(2\sqrt{n}\cdot c)^n$ 与 W 无关. 因此，若 $C\subset\bigcup_i W_i\subset K$ 且 $\sum_i|W_i|<\varepsilon/(2\sqrt{n}\cdot c)^n$，则 $f(C)\subset\bigcup_i f(W_i)$ 包含在总体积小于 ε 的 n 维方体的并之中，这说明 $f(C)$ 的测度为 0.

推论 2.2.1 若 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集，$\Phi:U\to V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 与 V 之间的微分同胚，且 $C\subset U$，则 $\Phi(C)$ 也是零测度集.

现在叙述 Fubini 定理的一个特殊情形.

定理 2.2.1 设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集. 令 $\mathbb{R}_t^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=t\}$，$C_t=C\cap\mathbb{R}_t^{n-1}$. 若对所有的 $t\in\mathbb{R}$，C_t 在 $\mathbb{R}_t^{n-1}\approx\mathbb{R}^{n-1}$ 中具有零测度，则 C 在 $\mathbb{R}^n$ 中也具有零测度.

本定理是说一个可测集

$$C\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},$$

如果与每一个超平面 $\mathbb{R}^{n-1}\times\{常数\}$ 的交是一个 $(n-1)$ 维零测度集，则 C 的测度为 0.

定理的证明用到下面的初等引理.

引理 2.2.2 由开区间组成的闭区间 $[0,1]$ 的开覆盖包含有限子覆盖 $\{I_j\,|\,j=1,\cdots,k\}$ 合于 $\sum_{j=1}^{k}|I_j|\leqslant 2$.

证 选取一个有限子覆盖，使得不能从该子覆盖中删去任何一个开区间(否则便不是 $[0,1]$ 的覆盖)，记这一子覆盖为 $\{I_j\,|\,j=1,\cdots,k\}$. 设 I_j 的端点为 a_j,b_j，且编号按左端点 a_j 的大小而定.

易见当 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，因此编号是惟一的. 另外，假定 $k\geqslant 3$. 我们有

$$a_i < a_{i+1} < b_i \leqslant a_{i+2}.$$

倘若第二个不等式不成立，覆盖中将出现一段空隙. 至于第三个，因 $b_i < b_{i+1}$（否则 $(a_i, b_i)\supset(a_{i+1}, b_{i+1})$），倘若 $a_{i+2} < b_i$，那么 $(a_i, b_i)\cup(a_{i+2}, b_{i+2})\supset(a_{i+1}, b_{i+1})$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^{k-2}(b_i - a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-2}(a_{i+1} - a_i) + (b_{k-1} - a_{k-1}) \\ &\quad + (b_k - a_k) \leqslant \sum_{i=1}^{k-2}(a_{i+2} - a_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k-2}(a_{i+1} - a_i) \\ &\quad + (b_{k-1} - a_{k-1}) + (b_k - a_k) \\ &= b_{k-1} - a_1 + b_k - a_2 \leqslant 2.\end{aligned}$$

定理 2.2.1 的证明　不失一般性，假定 $C\subset\mathbb{R}^{n-1}\times[0,1]$. 依假设，对每一 $t\in[0,1]$，C_t 在$\mathbb{R}^{n-1}\times\{t\}$中具有零测度. 任给 $\varepsilon>0$，可找到 C_t 的开覆盖$\{W_t^i \mid W_t^i$ 是$\mathbb{R}_t^{n-1}$中开方体，$i\in\mathbb{N}\}$，使得 $\sum\limits_i\left|W_t^i\right|<\varepsilon$. 设$\bigcup\limits_i W_t^i\subset\mathbb{R}_t^{n-1}$ 在$\mathbb{R}^{n-1}$上投影为 W_t. 显然，W_t 是$\mathbb{R}^{n-1}$中的开集.

因 x_n 是最后一个坐标，对固定的 t，$|x_n - t|$是 C 上的连续函数，且在 C_t 上取值为 0，而 $C-(W_t\times[0,1])$是 C 的闭子集因而是紧致子集. 将函数$|x_n - t|$限制在 $C-(W_t\times[0,1])$上必取得极小值，设为 α，记 $I_t^\alpha=(t-\alpha, t+\alpha)$，则

$$C\cap\{x\in\mathbb{R}^n \,\big|\, |x_n - t| < \alpha\}\subset W_t\times I_t^\alpha.$$

区间族$\{I_t^\alpha\}$覆盖$[0,1]$，由引理 2.2.2，存在有限子覆盖，设为$\{I_j \mid j=1,\cdots,k\}$（这里 $I_j = I_{t_j}^{\alpha_j}$），使得 $\sum|I_j|\leqslant 2$，从而由长方体组成的可数族$\{W_{t_j}^i\times I_j \mid j=1,\cdots,k, i\in\mathbb{N}\}$覆盖 C 并且总体积小于

2ε.

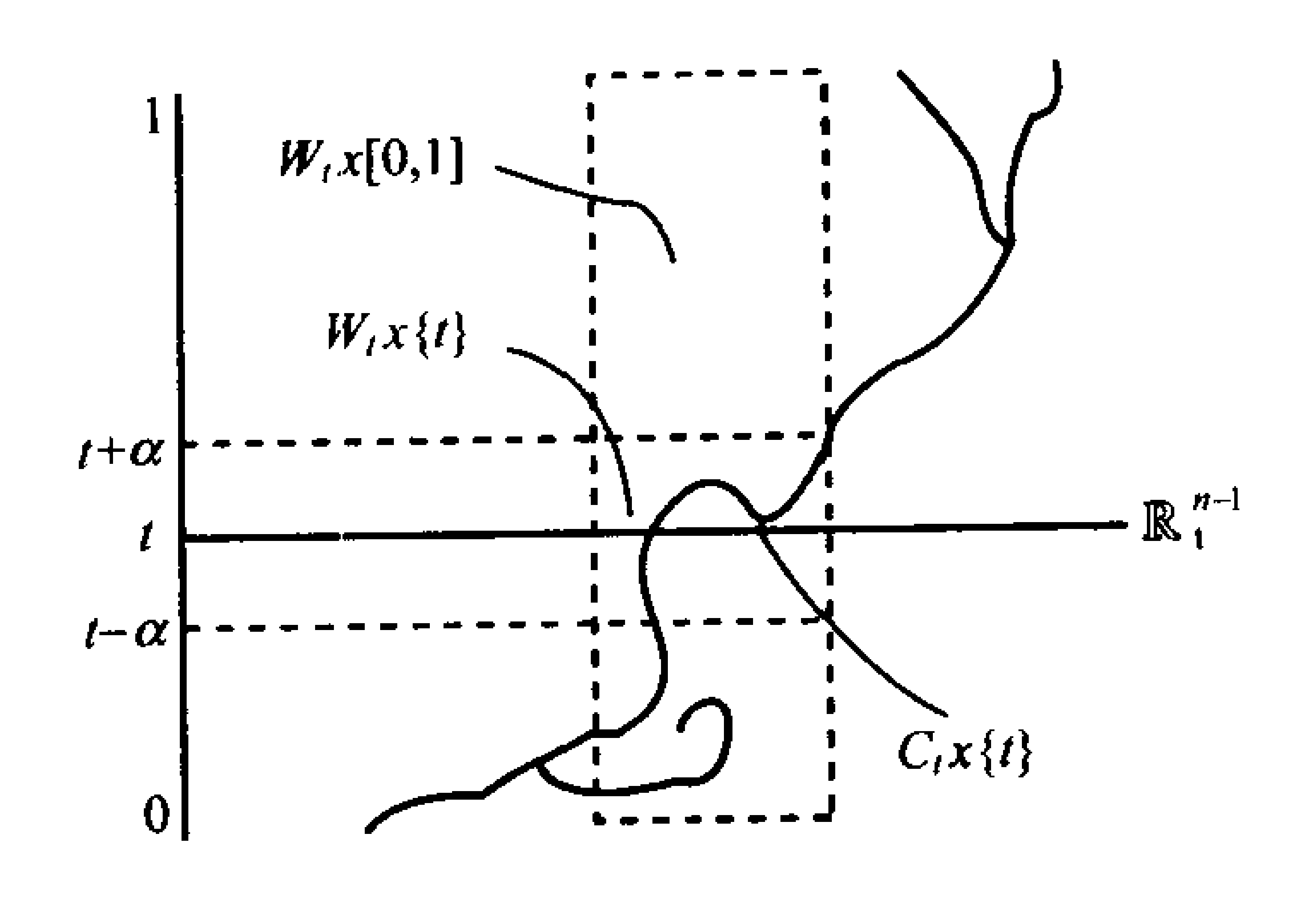


图 2.7

注 在上述 Fubini 定理中,要求 C 是紧致集. 然而我们可将该条件削弱,换成 C 为可数个紧致集的并. 满足后一条件的集包括以下几种:

(i) 闭集 D,因它可表为 $D=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D\cap\{|x|\leqslant n\}$,

(ii) 开集,它可写成可数个闭球的并,

(iii) 这些集在连续映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 下的像(因为紧致集的连续映射像仍为紧致的),

(iv) 以上类型的集的有限交再做可数并.

下面采用 Milnor 的证法给出 Sard 定理的证明,见文献[56].

2.2.2 Sard 定理的证明

先看一种特殊情形. 设 S 为$\mathbb{R}^n$ 中的 s 维微分子流形,$f: S\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射,又 $s<p$,则 $f(S)$是$\mathbb{R}^p$ 的零测度集(留作练习). 显然,S 本身是f 的临界点集. 更一般地,有下面的 Sard 定理.

定理 2.2.2 设 S 为$\mathbb{R}^n$ 中的微分子流形,$f: S\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射,$p\geqslant 1$. 令 C 为f 的临界点集,则 $f(C)\subset\mathbb{R}^p$ 为零测度集.

证 对 S 的维数s 使用归纳证明. 当 $s=0$ 时结论显然成立. 假定当流形 s 的维数不大于$s-1$ 时结论成立,证明当 S 的维数为 s 时结论亦真.

因为流形具有可数拓扑基,又一个集具有零测度的性质在微分同胚下保持不变(据推论 2.2.1)并且可数个零测度集的并仍为零测度集,因此只需就下列局部形式的结论予以证明:

若 S 是$\mathbb{R}^s$ 中的开子集,$f: S \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射.假定

$$C = \{x \in S \mid rk_x f < p\},$$

那么 $f(C)$的测度为 0.

对 $k \geqslant 1$,令

$C_k = \{x \in S \mid f$ 在点 x 处的阶数$\leqslant k$ 的各阶偏导数均为 $0\}$,

显然 C_k 为闭集,且

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots.$$

证明分以下 3 步:

第 1 步 $f(C - C_1)$有零测度;

第 2 步 当 $i \geqslant 1$ 时,$f(C_i - C_{i+1})$有零测度;

第 3 步 当 k 足够大时,$f(C_k)$有零测度,

于是

$$f(C) = f(C - C_1) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} f(C_i - C_{i+1}) \cup f(C_k)$$

有零测度.

第 1 步的证明.当 $p = 1$ 时,$C = C_1$,因此假定 $p \geqslant 2$.对于每一 $x \in C - C_1$,若能找点 x 的一个开邻域 V,使得 $f(V \cap C)$具有零测度.那么 $f(C - C_1)$的测度为 0,这是因为 $C - C_1$ 可以被可数个这样的 V 所覆盖.

因 $x \notin C_1$,存在一阶偏导数在点 x 的值不为 0,不妨设 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$,于是映射

$$h: S \to \mathbb{R}^s, \quad (x_1, \cdots, x_s) \mapsto (f_1(x), x_2, \cdots, x_s)$$

在点 x 非奇异.据反函数定理,h 将点 x 的某一开邻域 V 微分同

胚地映到一个开集 V' 上. 复合映射 $g=f\circ h^{-1}: V'\to\mathbb{R}^p$ 具有下列形式:

$$g:(z_1,\cdots,z_s)\mapsto(z_1,g_2(z),\cdots,g_p(z)).$$

注意 g 的临界点集 $C'=h(V\cap C)$,因此 g 的临界值集 $g(C')=f(V\cap C)$. 因为对每一个 $(t,z_2,\cdots,z_s)\in V'$, $g(t,z_2,\cdots,z_s)\in\{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}\subset\mathbb{R}^p$,所以 g 将超平面 $\{z\mid z_1=t\}$ 映入超平面 $\{y\mid y_1=t\}$. 令

$$g^t=g\Big|(\{t\}\times\mathbb{R}^{s-1})\cap V':(\{t\}\times\mathbb{R}^{s-1})\cap V'\to\{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}.$$

点 $z=(t,z_2,\cdots,z_s)\in(\{t\}\times\mathbb{R}^{s-1})\cap V'$ 为 g^t 的临界点当且仅当它是 g 的临界点,因为 g 的 Jacobi 矩阵为

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline * & (\partial g_i^t/\partial z_j)\end{array}\right).$$

根据归纳假设, g^t 的临界值集在 $\{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}$ 中有零测度,因此 g 的临界值集与每一超平面 $\{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}$ 交于一个零测度集. 据 Fubini 定理及其注,

$$g(C')=f(V\cap C)$$

有零测度.

第 2 步的证明. 对于每一 $x_0\in C_k-C_{k+1}$,存在某个 $k+1$ 阶偏导数在点 x_0 的值不为 0,不妨设

$$\partial^{k+1}f_1\Big/\partial x_1\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}(x_0)\neq 0.$$

令函数 $W:S\to\mathbb{R}$ 定义为 $W(x)=\partial^k f_1\Big/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}(x)$,则 $W(x_0)=0$, $\partial W/\partial x_1(x_0)\neq 0$,于是由

$$h(x)=(W(x),x_2,\cdots,x_s)$$

定义的映射 $h:S\to\mathbb{R}^s$ 将点 x_0 的某一开邻域 V 微分同胚地映成开集 V' 上，且 $h(C_k\cap V)\subset\{0\}\times\mathbb{R}^{s-1}$. 令 $g=f\circ h^{-1}:V'\to\mathbb{R}^p$ 及 $g^0=g|(\{0\}\times\mathbb{R}^{s-1})\cap V'$. 依归纳假设，$g^0$ 的临界值集在 $\mathbb{R}^p$ 中有零测度. 然而 $h(C_k\cap V)$ 中的每一点必为 g^0 的临界点(因为所有阶数不大于 k 的偏导数均为 0)，故

$$g^0(h(C_k\cap V))=f(C_k\cap V)$$

有零测度. 由于 C_k-C_{k+1} 被可数多个这样的 V 所覆盖，因此 $f(C_k-C_{k+1})$ 有零测度.

第 3 步的证明. 设 $W\subset S$ 是边长为 a 的 s 维闭方体. 若 k 足够大，例如取 $k>s/p-1$，我们将证明 $f(W\cap C_k)$ 有零测度. 因为 C_k 可以被可数多个这种 s 维方体所覆盖，因而 $f(C_k)$ 的测度也为零.

据 Taylor 公式和 W 的紧致性以及 C_k 的定义，有

$$f(x+\delta)=f(x)+R(x,\delta),\ |R(x,\delta)|\leqslant c\cdot|\delta|^{k+1},\tag{$*$}$$

其中 $x\in C_k\cap W$，$x+\delta\in W$ 并且对于取定的 f 与 W 来说，c 为常数.

将 W 剖分成边长为 a/r 的小方体，这样的 s 维方体共有 r^s 个. 设 W_1 为其中的一个. 它包含 C_k 中的一点 x. W_1 中的每一点可写为 $x+\delta$，其中 $|\delta|\leqslant\frac{\sqrt{s}a}{r}$. 由式($*$)知，$f(W_1)$ 位于边长为

$$2c\cdot\frac{(\sqrt{s}a)^{k+1}}{r^{k+1}}=\frac{b}{r^{k+1}}$$

的 p 维方体中，因此 $f(C_k\cap W)$ 包含在最多 r^s 个这样的 p 维方体的并之中. 这些方体的总体积

$$\sum\leqslant r^s\cdot\left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p=b^p\cdot r^{s-(k+1)p}.$$

因假定 $p(k+1)>s$,故当 $r\to\infty$时, $\sum$ 趋近于 0,所以 $f(W\cap C_k)$必定有零测度.

推论 2.2.2 C^∞ 映射 $f:S\to\mathbb{R}^p$ 的正则值集是$\mathbb{R}^p$ 中的稠密子集.

证 据定理2.2.2,f 的临界值集是$\mathbb{R}^p$ 中的零测度集.而零测度集不能包含$\mathbb{R}^p$ 中任何非空开集,因此它的补集即 f 的正则值集在$\mathbb{R}^p$ 中处处稠密.

最后指出,Sard 定理是微分拓扑中的一个基本结果.下一节介绍基本横截性引理,证明的关键工具便是 Sard 定理.事实上,Sard 定理是微分拓扑中许多重要的存在性定理的基础.

§2.3 基本横截性引理

设 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射.对每一 $\lambda\in\mathbb{R}^r$,定义映射 $F_\lambda:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为

$$F_\lambda(x)=F(x,\lambda),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

因而 F 可看做是由C^∞ 映射 F_λ 组成的光滑映射族$\{F_\lambda\}$,它以 $\lambda\in\mathbb{R}^r$ 为参数.现假定 S 是$\mathbb{R}^p$ 中的微分子流形,我们问:如果 $F\pitchfork S$,是否对所有的参数 $\lambda\in\mathbb{R}^r$,F_λ 横截 S 呢?

例 1 取 $n=2,r=1,p=3$.令映射

$$F:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3,\quad ((x,y),\lambda)\mapsto(x,y,\lambda).$$

易见对每一 $\lambda\in\mathbb{R}$,F_λ 将$\mathbb{R}^2$ 映成$\mathbb{R}^3$ 中的水平面 $z=\lambda$.取 S 为$\mathbb{R}^3$ 中的二维球面 S^2.因为 F 是一个微分同胚,自然有$F\pitchfork S^2$.

另一方面,当 $\lambda\neq\pm1$ 时,$F_\lambda\pitchfork S^2$.而当 $\lambda=\pm1$ 时,平面 $z=\pm1$ 与球面 S^2 相切,这说明 F_1 及 F_{-1}均不与 S^2 横截.尽管如此,参数 λ 的任意值总可以用使得$F_\lambda\pitchfork S^2$的 λ 的值来逼近,而这正是基本横截性引理(又叫参数横截性引理)的内容.证明该引理用到的一个重要工具便是 Sard 定理.由于技术上的理由,我们将

用有限个光滑流形 $S_1,\cdots,S_l$ 来代替单个的流形 S.

引理 2.3.1(基本横截性引理)　设 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射,$S_1,\cdots,S_l$ 为$\mathbb{R}^p$ 中的微分子流形.若$F \pitchfork S_i(i=1,\cdots,l)$,则存在$\mathbb{R}^r$ 的一个稠密子集 A,使得当 $\lambda\in A$ 时,

$$F_\lambda \pitchfork S_i,\quad i=1,\cdots,l.$$

证　由定理2.1.1,

$$M_i = F^{-1}(S_i),\quad i=1,\cdots,l$$

是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$ 中的微分子流形(若 M_i 非空).令 $\pi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$ 为标准投影.如果能证明

$$\pi\big|M_i \pitchfork \{\lambda\}\Leftrightarrow F_\lambda \pitchfork S_i,\quad i=1,\cdots,l,$$

那么由 Sard 定理,本引理得证.而证上式成立,下面分为两步来做.为简单起见,我们省去下标 i.

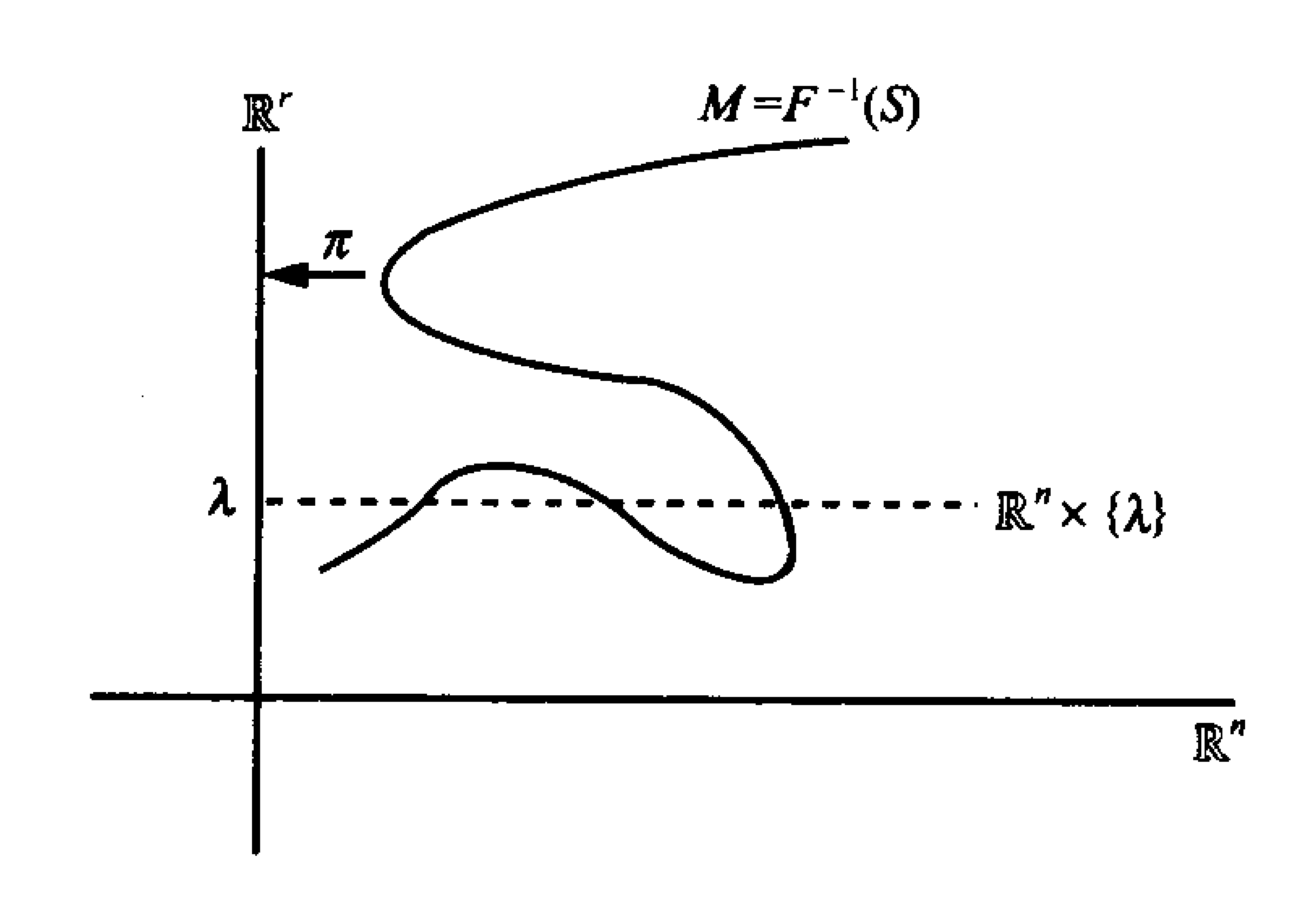


图 2.8

第 1 步　$F_\lambda \pitchfork S\Leftrightarrow$水平空间$\mathbb{R}^n\times\{\lambda\}$与 M 横截.

由条件$F \pitchfork S$知,对每一 $z=(x,\lambda)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$,若 $F(z)\in S$,则有

$$DF(z)(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)+T_{F(z)}S=\mathbb{R}^p,\tag{1}$$

而$F_\lambda \pitchfork S$的条件是:对于式(1)中的 $x\in\mathbb{R}^n$(即选取的 $x\in\mathbb{R}^n$ 合于$(x,\lambda)=z$),有

$$DF(z)(\mathbb{R}^n\times\{0\})+T_{F(z)}S=\mathbb{R}^p. \tag{2}$$

再有$\mathbb{R}^n\times\{\lambda\}$与 M 相横截的条件是:对于式(1)中的 $x\in\mathbb{R}^n$,有

$$\mathbb{R}^n\times\{0\}+T_zM=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \tag{3}$$

其中 $T_zM=(DF(z))^{-1}(T_{F(z)}S)$(根据定理2.1.1).

假定式(3)成立,应用 $DF(z)$作用于式(3)的两边,并利用式(1)便得到式(2).反之,由式(2)导出式(3)则是线性代数中的一个简单练习,留给读者补述.

第2步 $\mathbb{R}^n\times\{\lambda\}$与 M 横截$\Leftrightarrow\pi|M\pitchfork\{\lambda\}$.

$\pi|M\pitchfork\{\lambda\}$是指对于式(1)中的 $x\in\mathbb{R}^n$,有

$$D\pi(z)(T_zM)=\mathbb{R}^r, \tag{4}$$

即 λ 是 $\pi|M$ 的正则值,显然(3)$\Leftrightarrow$(4).例如将 $D\pi(z)$作用在式(3)的两边便得到式(4).证毕.

几何直观告诉我们,若欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的两个子流形 M 与 N 不横截相交,有可能将其中一个,例如 M 沿某一方向做微小平移便与N 横截相交.现将它精确描述如下.

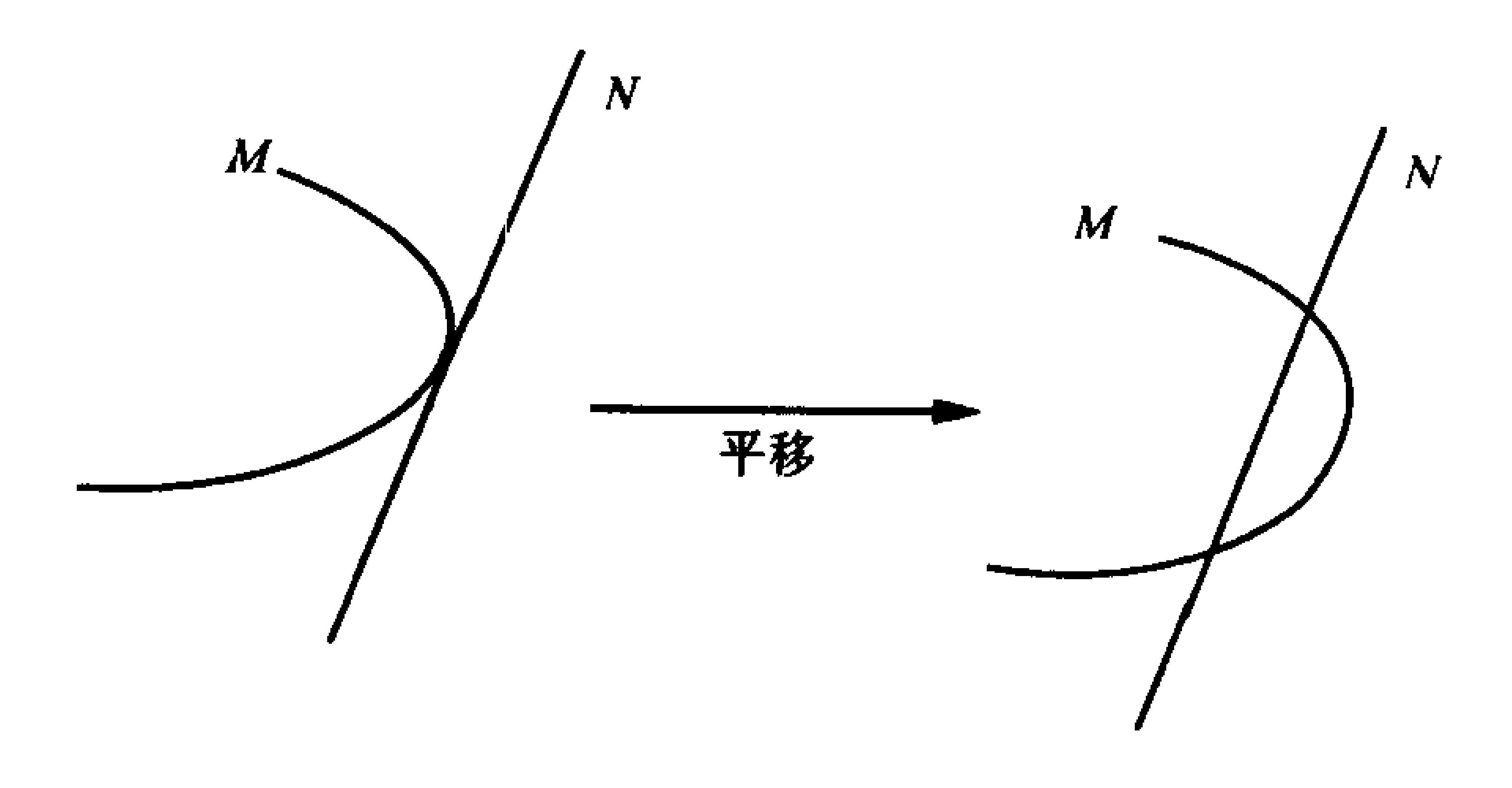


图2.9

设 $a\in\mathbb{R}^n$,令 $L_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为沿方向 a 的平移,定义为 $L_a(x)=x+a,x\in\mathbb{R}^n$.记 M 在平移 L_a 下的像为 M_a,$M_a=L_a(M)$.

断言 集 $\{a\in\mathbb{R}^n\mid M_a$ 与 N 横截相交$\}$是$\mathbb{R}^n$ 中的稠密子集.

为证明该断言,定义 $F:M\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 $F(x,a)=x+a$,显然 F 是一个淹没,故$F\pitchfork N$.注意到引理 2.3.1 中的$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^r$ 及$\mathbb{R}^p$ 可用一般的微分流形来代替,结论仍然成立.因此存在$\mathbb{R}^n$ 的一个稠密子集 A,使得当 $a\in A$ 时,$F_a\pitchfork N$.然而$F_a\pitchfork N$当且仅当 M_a 与N 横截(读者补述理由),因此断言成立.

进而考察 C^∞映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 与$\mathbb{R}^p$ 中子流形 S 横截的问题.据命题2.1.1,f 是否与S 横截等价于 graph$f$ 是否与$\mathbb{R}^n\times S$ 横截相交.而对于后者,上一段已做讨论.因此自然会猜想:倘若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 不与$\mathbb{R}^p$ 中子流形 S 横截,我们可以对 f 作微小扰动,使之与 S 横截.将这一直观想法精确化,可引导到许多深刻结果,它们称之为横截性定理.下一节将介绍本书要用到的一些结果.

§2.4 Thom 横截性定理

2.4.1 映射空间的拓扑

对于给定的 C^∞映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 和$\mathbb{R}^p$ 中的子流形 S,本节将证明可以找到一个 C^∞映射 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 与 S 相横截,并且 g 与f 相“接近”.而描述 g 与f 相接近需要在由 C^∞映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 组成的集 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中引入拓扑结构.粗略地讲,$g$ 与f 相“接近”应该对任意 $x\in\mathbb{R}^n$,它们的值 $f(x)$与 $g(x)$彼此“接近”,即在 C^0 意义下 g 任意逼近f.还可以进一步提出要求,不仅要它们的值接近,而且要求它们的一阶导数值彼此也接近,甚至要求 g 与f 的从一阶直至r 阶的导数值也彼此接近,等等.为此我们首先引入 C^∞映射 f 的r-导网映射.

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞映射,$f=(f_1,\cdots,f_p)$,其中 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 表 f 的第i 个分量函数.将映射 f 在点 $x\in\mathbb{R}^n$ 处的芽$(\mathbb{R}^n,x)\to\mathbb{R}^p$

取 r-导网,记为 $j^rf(x)$,定义为

$$j^rf(x) = (j^rf_1(x),\cdots,j^rf_p(x)),$$

其中 $j^rf_i(x)$表示 f 的第 i 个分量 f_i 在点 x 处的芽的 r-导网(见§1.1).据 Taylor 公式,f 在点 x 处的 r-导网 $j^rf(x)$可用 f 在点 x 处的 r 阶 Taylor 多项式作为其自然表示.

对于 $x\in\mathbb{R}^n$,令

$$J_x^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \{j^rf(x)\,|\,f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\}.$$

易见 $J_x^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$可以与向量空间 $P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$等同,其中 $P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$表示从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的次数不大于 r 的多项式映射所成的向量空间,并且该空间可分解为

$$P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p\times\prod_{k=1}^{r}\mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$

其中 $\mathscr{L}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$表示从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的 k 重对称线性映射所成的向量空间或者说从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的 k 次齐次多项式映射空间.$J_x^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$具有向量空间结构,因而是一个有限维 C^∞ 流形.令

$$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \bigcup_{x\in\mathbb{R}^n}J_x^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$

从而有下面的等同关系:

$$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n\times P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p), \tag{1}$$

它可以看做以 $J^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 为底空间的向量丛,称为从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的 C^∞映射的 r-导网丛.

定义 2.4.1 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集,$f:U\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞映射.f 在点$x\in U$ 的r-导网扩张记为j_x^rf,定义为有序对$(x,j^rf(x))$,其中 $j^rf(x)$是 f 在点 x 处的 r 阶 Taylor 多项式(为其代表).于是有 C^∞映射

$$j^rf:U\to J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$

$$x\mapsto j_x^rf = (x,j^rf(x)),$$

它叫做 f 的 r-导网扩张. 又 $j_x^r f$ 可写为

$$j_x^r f = (x, f(x), \mathrm{D}f(x), \cdots, \mathrm{D}^r f(x)), \tag{2}$$

其中 $\mathrm{D}^k f(x)$ 表示 f 在点 x 处的 k 阶导数,它是一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的 k 重对称线性映射($k=1,\cdots,r$).

现在用邻域的语言来描述 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$的拓扑. $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$的基本邻域系由下列形式的集组成:

$$V_{K,r,\varepsilon} = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \mid \sup_{x\in K} \| j^r g(x) - j^r f(x) \| < \varepsilon\},$$

其中 K 为$\mathbb{R}^n$ 中的任意紧致子集(例如 K 可取为闭球$\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\leqslant s, s$ 为正实数$\}$),r 为非负整数,ε 为正实数. 由定义 2.4.1, $V_{K,r,\varepsilon}$可表示为

$$V_{K,r,\varepsilon} = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \mid \sup_{x\in K, 0\leqslant k\leqslant r} \| \mathrm{D}^k g(x) - \mathrm{D}^k f(x) \| < \varepsilon\},$$

这里 $\|\mathrm{D}^0 f(x)\| = |f(x)|$;对于 $k>0$, $\|\mathrm{D}^k f(x)\|$ 表示 f 在点 x 的 k 阶导数的范数(k 重线性映射 $L:\underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{k\text{个}}\to\mathbb{R}^p$ 的范数 $\|L\|$ 定义为 $\|L\| = \max\{|L(x_1,\cdots,x_k)|$:向量 $x_1,\cdots,x_k$ 位于$\mathbb{R}^n$ 的单位球面上$\}$).

$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的子集 X 叫做稠密子集,如果对任意 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$以及 f 的任意一个基本邻域 V,可找到 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$,使得 $g\in X\cap V$. 这说明 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的每一映射可用 X 中的映射来任意逼近.

命题 2.4.1 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$带有上述拓扑是一个 Baire 空间.

这意思是说 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的可数个开的稠密子集的交是处处稠密的.

关于映射空间拓扑的更详细论述,请参看文献[33].

2.4.2 横截性定理

定理 2.4.1 设 $Q_1,\cdots,Q_l$ 是$\mathbb{R}^p$ 中的微分子流形,则集

$$\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \big| f \pitchfork Q_i, i = 1,\cdots,l\}$$

是 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.

证 任取 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$,需证可用与子流形 $Q_1,\cdots,Q_l$ 相横截的C^∞映射来任意逼近 f.为此我们试图构作一光滑映射族 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^p$,使得 F 包含f且F 与诸Q_i 相横截($i=1,\cdots,l$),然后应用基本横截性引理.此外,假如构作的 F 是一个淹没,那么 $F\pitchfork Q_i(i=1,\cdots,l)$.

为构作 F,先回忆下列事实.命题 2.1.1 告诉我们,C^∞映射 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 与$\mathbb{R}^p$ 中子流形 Q 横截的必要充分条件是 graph$g$ 与$\mathbb{R}^n\times Q$ 在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中相横截.如果 graph$g$ 不与$\mathbb{R}^n\times Q$ 横截,据上一节所述,将 graph$g$ 沿某一方向做微小平移便和$\mathbb{R}^n\times Q$ 横截相交.因此取$\mathbb{R}^r=\mathbb{R}^p$,定义

$$F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p,$$

$$(x,\lambda)\mapsto F(x,\lambda) = f(x)+\lambda.$$

因为$DF(x,\lambda)=(Df(x)\mid I_p)$,其中 I_p 为$p\times p$ 单位矩阵,所以 F 是淹没,从而

$$F\pitchfork Q_i,\quad i=1,\cdots,l.$$

根据基本横截性引理,存在$\mathbb{R}^p$ 的一个稠密子集 A,使得当 $\lambda\in A$ 时,$F_\lambda\pitchfork Q_i(i=1,\cdots,l)$.此外 $F_0=f$.

任给 f 的一个基本邻域V,可选取 $\lambda_0\in A$,使得 λ_0 与 $0\in\mathbb{R}^p$ 非常接近,此时 $F_{\lambda_0}(x)=f(x)+\lambda_0$.显然 $F_{\lambda_0}\in V$,并且$F_{\lambda_0}\pitchfork Q_i$ $(i=1,\cdots,l)$.证毕.

由定义 2.4.1 知,C^∞映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 可诱导另一个 C^∞映射 $j^rf:\mathbb{R}^n\to J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$,称为 f 的 r-导网扩张.考虑 j^rf 与$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中子流形相横截,下面介绍 Thom 横截性定理的导网形式(见文献[35]).

定理 2.4.2 设 $Q_1,\cdots,Q_l$ 是导网空间$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的微分

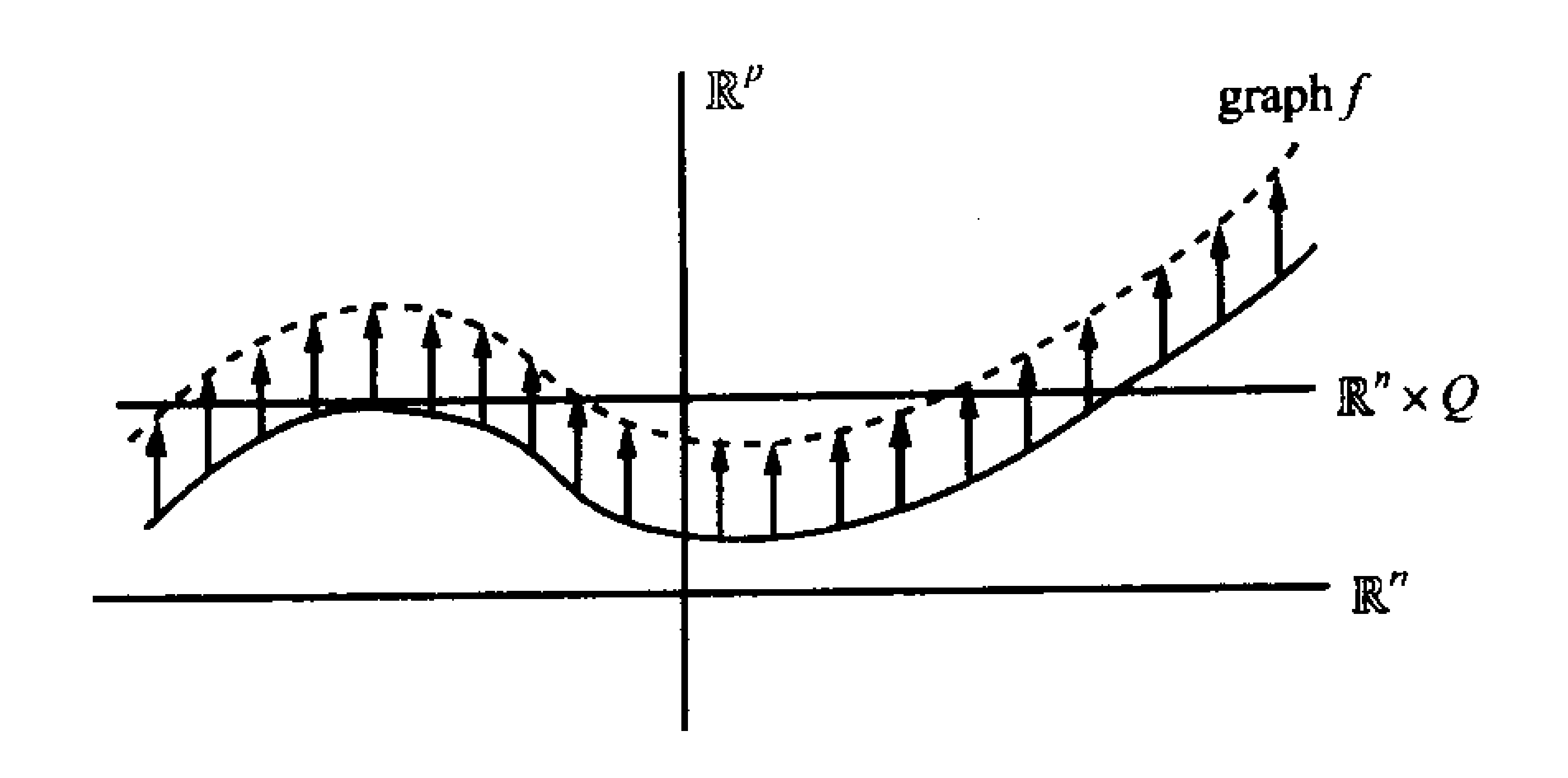


图 2.10

子流形,则集

$$\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j^r f \pitchfork Q_i, i = 1,\cdots,l\}$$

是 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.

证 任给 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$,需证可用 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$来任意逼近 f,且 g 的 r-导网扩张 $j^r g$ 横截 $Q_i(i=1,\cdots,l)$.

由关系式(1),

$$J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p).$$

因 $P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$是从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的次数不大于 r 的多项式映射所成的向量空间,故可等同于一个欧氏空间.记 $S=P^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$,构作光滑映射

$$F:\mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}^p,$$
$$(x,s) \mapsto F(x,s) = f(x) + s(x)$$

及

$$G:\mathbb{R}^n \times S \to J^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p),$$
$$(x,s) \mapsto G(x,s) = j_x^r F_s = (x, j^r(f+s)(x)).$$

因为 G 的前 n 个坐标恰为 x,而对于给定的 x,G 的余下坐标则

表示S上的一个平移，它是由f在点x的r阶Taylor多项式$j^r f(x)$所决定的S上的平移，因而是$S = P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$到自身的一个仿射同构. 于是$G$是淹没，且$G \pitchfork Q_i (i = 1, \cdots, l)$.

根据基本横截性引理，存在S的稠密子集S_0，使得对每一$s \in S_0$，

$$G_s = j^r F_s = j^r(f + s)$$

横截于$Q_1, \cdots, Q_l$.

任给f的一个基本邻域V，可选取多项式$s \in S_0$足够小，使得$f + s$与f非常接近，即$f + s \in V$，并且$j^r(f + s) \pitchfork Q_j (i = 1, \cdots, l)$.

注 定理2.4.1和2.4.2的证明都使用了基本横截性引理，而且证明中对映射做微小变动. 具体来说，在定理2.4.1证明中是对f做常值形变，将f变为$f + \lambda (\lambda \in \mathbb{R}^p)$，使得与$\mathbb{R}^p$中诸子流形$Q_i$横截. 在定理2.4.2证明中对$f$不是做常值形变，因为它不能改变$f$的导数值，做的是多项式形变，将$f$变为$f + s (s \in P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$，再对$f + s$取$r$-导网扩张得$j^r(f + s)$，进而考虑它与$J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$中诸子流形$Q_i$横截.

定理2.4.2提供了Thom横截性定理的导网形式的一种表达方式，下面我们再介绍一种，它更多地应用于奇点理论研究中.

将$P^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$记为$J^r(n, p)$或$J^r_{n,p}$. 特别，令$J^{r,0}_{n,p}$为$J^r_{n,p}$的子集，要求多项式的常数项为0，即$J^{r,0}_{n,p}$是由$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^p$的次数不大于$r$且常数项为0的多项式映射组成. 在$J^{r,0}_{n,p}$中取定范数$\|\cdot\|$(如可用多项式映射的各个分量的诸系数的绝对值的最大者作为范数).

给定C^∞映射$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$，考察$f$的$r$-导网映射

$$j^r f: \mathbb{R}^n \to J^r_{n,p},$$

$$x \mapsto j^r f(x) = f$$

在点 x 的γ阶 Taylor 多项式与 $J^{r,0}_{n,p}$ 中子流形相横截的问题. 更确切地说,对于 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 以及每一整数 $r\geqslant 1$,定义映射 $j^r_0 f:\mathbb{R}^n\to J^{r,0}_{n,p}$ 为 $j^r_0 f(x)=(f-f(x))$的 r 阶 Taylor 多项式. 设 Q 为 $J^{r,0}_{n,p}$ 中子流形,记

$$T(Q)=\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j^r_0 f \pitchfork Q\}$$

定理 2.4.3 设 f 和 Q 及 $T(Q)$如上所述. 任给 $\varepsilon>0$,存在 $P\in J^{r,0}_{n,p}$,使得

$$\|P\|<\varepsilon,\quad f+P\in T(Q).$$

证明提要 证明方法与定理 2.4.2 相同. 令映射

$$F:\mathbb{R}^n\times J^{r,0}_{n,p}\to\mathbb{R}^p,$$

$$(x,p)\mapsto f(x)+p(x)$$

并且

$$G:\mathbb{R}^n\times J^{r,0}_{n,p}\to J^{r,0}_{n,p},$$

$$(x,p)\mapsto j^r_0 F_p(x)=j^r_0 f(x)+j^r p(x),$$

其中 $F_p(x)=F(x,p)$.

定理 2.4.3 还可以用另外一种表达形式来描述.

我们说性质 P 对于$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$而言是通有的(generic)或一般的,如果由性质 P 确定的集是$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的剩余集,即它是$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中可数个开的稠密子集的交集.

定理 2.4.3 说明 $T(Q)$是 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集. 而 $T(Q)$可表为 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中可数个开子集的交(留作练习). 直观上看,与一子流形不横截的映射可以在任意小的扰动下成为横截,而原来横截的映射仍可保持横截,因此有下列

定理 2.4.4 性质 $j^r_0 f\pitchfork Q$(即 $f\in T(Q)$)对于 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$而言具有通有性,其中 Q 为$J^{r,0}_{n,p}$中任意子流形.

注 用 $J^{r,0}_{n,p}$中的有限个子流形 $Q_1,\cdots,Q_l$ 代替单个的子流形

Q,相应的通有性质仍然成立.

§2.5 光滑映射的秩的一般属性

我们知道,点 $x\in\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 的奇点是指 f 在点 x 的秩 $rk_x f$(即 f 在点 x 的微分 $\mathrm{D}f(x)$的秩)小于 $\min(n,p)$,因此很自然地利用 $\mathrm{rank}\mathrm{D}f(x)$来区分奇点类型.

定义 2.5.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射,点 $x\in\mathbb{R}^n$. 若微分 $\mathrm{D}f(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 的核空间具有维数 i,则说点 x 位于集 $\Sigma^i(f)$中,并说 f 在点 x 具有 Σ^i 类奇点.集

$$\Sigma^i(f)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \dim(\mathrm{Ker}\mathrm{D}f(x))=i\}$$

称为 Thom 的一阶奇点集.于是$\mathbb{R}^n$ 被分划为有限个一阶奇点集的并,并且在每一个奇点集 $\Sigma^i(f)$上,f 具有常秩.

例 1 考虑 Whitney 尖点映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(x,xy-\frac{1}{3}y^3)$,有

$$\mathrm{D}f(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & x-y^2\end{pmatrix},$$

$$\dim\mathrm{Ker}\mathrm{D}f(x,y)=\begin{cases}0, & 若\ x\neq y^2,\\ 1, & 若\ x=y^2.\end{cases}$$

于是 $\Sigma^0(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\neq y^2\}$是整个平面除去抛物线 $x=y^2$,$\Sigma^1(f)$则为该抛物线.又当 $i\geqslant 2$ 时,$\Sigma^i(f)=\varnothing$.

显然,$\Sigma^0(f)$和 $\Sigma^1(f)$都是$\mathbb{R}^2$ 的子流形.

例 2 设 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,(x,y)\mapsto(x^2+y,y^2)$,则

$$\mathrm{D}f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 1\\ 0 & 2y\end{pmatrix}.$$

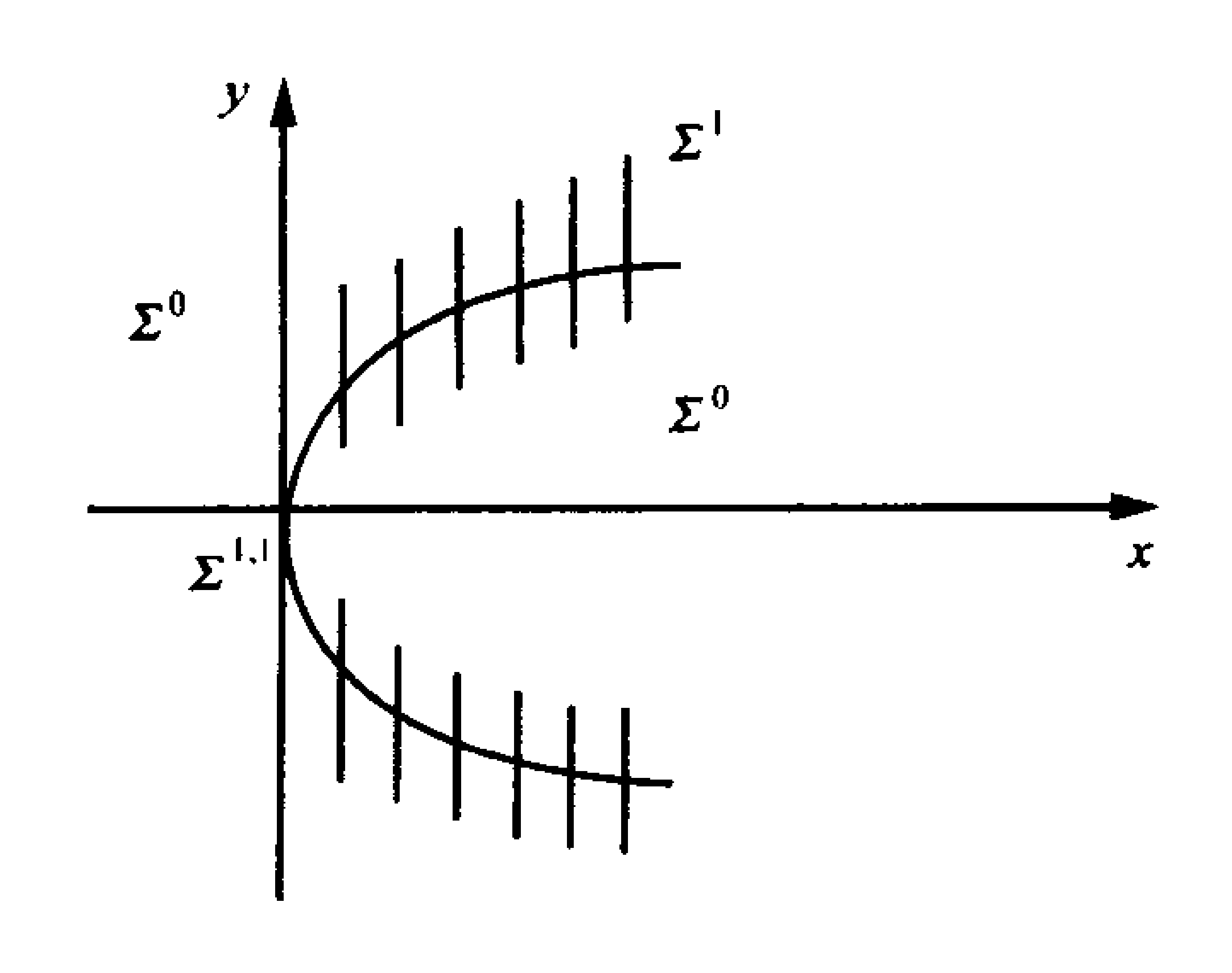


图 2.11

易见 $\Sigma^1(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$，$\Sigma^0(f)=\mathbb{R}^2-\Sigma^1(f)$. 当 $i\geqslant 2$ 时，$\Sigma^i(f)=\varnothing$. 显然 $\Sigma^1(f)$不是$\mathbb{R}^2$ 的子流形，因为它是两条坐标轴的并. 但是值得注意的是，只要将 f 稍做形变，则相应的 Σ^1 类的奇点可组成一个子流形. 由于对 f 做常值形变不影响 Jacobi 矩阵，因此考虑线性形变，例如，令

$$f_\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$

$$(x,y)\mapsto(x^2+y,y^2+4\lambda x),$$

其中 λ 为非零实数. 此时

$$\mathrm{D}f_\lambda(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 1\\ 4\lambda & 2y\end{pmatrix},$$

$$\Sigma^1(f_\lambda)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=\lambda\}.$$

双曲线 $\Sigma^1(f_\lambda)$是$\mathbb{R}^2$ 的子流形. 当 λ 与 0 很接近时，f_λ 与 f 也很接近.

上述两例给我们的启示：一个 C^∞ 映射 f 的一阶奇点集$\Sigma^i(f)$在一般状况下为微分子流形，否则只需对 f 稍作形变. 而要严格地证明，需要利用横截性定理.

现回到例 1,Whitney 映射的奇点集 Σf 恰为 Thom 一阶奇点集 $\Sigma^1(f)$.进一步观察,抛物线上包含的原点与其他点不同之处是 $\mathrm{Ker}Df(0,0)$和 $\Sigma^1(f)$在原点相切,而 $f|\Sigma^1(f)$在 $\Sigma^1(f)-\{(0,0)\}$的所有点均具有秩 1.因此原点位于集 $\Sigma^1(f|\Sigma^1(f))$中,而抛物线上其他点位于 $\Sigma^0(f|\Sigma^1(f))$中.简记

$$\Sigma^{i_2}(f \mid \Sigma^{i_1}(f)) = \Sigma^{i_1,i_2}(f),$$

则上述事实可以写为:Whitney 尖点(即原点)位于 $\Sigma^{1,1}(f)$中,抛物线上其他点位于 $\Sigma^{1,0}(f)$中,又

$$\Sigma^1(f) = \Sigma^{1,0}(f) \cup \Sigma^{1,1}(f).$$

$\Sigma^{i_1,i_2}(f)(i_1 \geqslant i_2)$称为 Thom 的二阶奇点集,还可以归纳地定义高阶奇点集.但是按照 Thom 的方法定义高阶奇点集,例如 $\Sigma^{i_1,i_2}(f)$,首先要求 $\Sigma^{i_1}(f)$是微分流形.其次,用这种方法定义高阶奇点集讨论起来不方便.Boardman 利用导网空间对 Thom 奇点集重新定义,这里仅考虑特殊情形.

我们用 $L(n,p)$表示从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的线性映射所成的向量空间.对照 $\Sigma^i(f)$的定义,相应地在 $L(n,p)$中引入子集 Σ^i,令

$$\Sigma^i = \{A \in L(n,p) \mid \dim\mathrm{Ker}A = i\},$$

其中 $n-\min(n,p) \leqslant i \leqslant n$.显然

$$\Sigma^i = \{A \in L(n,p) \mid \mathrm{rank}A = r = n-i\},$$

这里 $0 \leqslant r \leqslant \min(n,p)$.

在$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^p$ 上分别取定基,则 $L(n,p)$等同于 $p \times n$ 矩阵所成之向量空间$M(p,n)$,并且 Σ^i 等同于$M(p,n;n-i)=\{E \in M(p,n) | \mathrm{rank}E = n-i\}$.由 §1.2 中的例 2,$\Sigma^i$ 是$L(n,p)$中余维数为 $i(p-n+i)$的微分子流形.

定义 2.5.2 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射,定义 C^∞ 映射

$$Df:\mathbb{R}^n \to L(n,p), \quad x \mapsto Df(x).$$

如果 Df 横截于 $L(n,p)$ 中的所有子流形 Σ^i，那么 f 叫做好(good)映射.

注 按照 $J_{n,p}^{r,0}$ 的定义，$L(n,p)$ 就是 $J_{n,p}^{1,0}$，并且 Df 的定义可改写为

$$j_0^1 f:\mathbb{R}^n \to J_{n,p}^{1,0}, \quad x \mapsto j_0^1 f(x) = \mathrm{D}f(x),$$

因此作为定理 2.4.3 的特殊情形，立即得到

定理 2.5.1 设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为任意 C^∞ 映射，则对每一 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in L(n,p)$，使得 $\|A\| < \varepsilon$ 并且

$$f + A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad x \mapsto f(x) + A \cdot x$$

是一个好映射.

该定理说明任意一个 C^∞ 映射经线性扰动(如有必要)便是一个好映射.

推论 2.5.1 $\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 为好映射$\}$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ 中的稠密子集. 并且当 f 是好映射时，每一个 $\Sigma^i(f)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的微分子流形，其余维数为 $i(p-n+i)$.

证 第一断言显然. 第二断言是因为当 f 为好映射时，

$$\Sigma^i(f) = (\mathrm{D}f)^{-1}(\Sigma^i),$$

据定理 2.1.1 便可获得.

最后将定理 2.5.1 和推论 2.5.1 应用于两种特殊情形.

(i) 设 $p=1$，此时 $L(n,1) = \Sigma^{n-1} \cup \Sigma^n$，其中 $\Sigma^n = \{0\}$，这里 $0:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 表零映射. 又 $\Sigma^{n-1} = (\mathbb{R}^n)^* - \{0\}$，其中 $(\mathbb{R}^n)^*$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的对偶空间.

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为好映射 $\Leftrightarrow$ "D$f(x) = 0$" 蕴涵 "Df 在点 x 横截 $\{0\} = \Sigma^n$." 而这意味着 f 在每一奇点 x，芽 $\mathrm{D}f:(\mathbb{R}^n,x) \to ((\mathbb{R}^n)^*,0)$ 具有极大秩 n，因此 f 在点 x 的 Hessian 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$$

是满秩的，即 f 在点 x 处的芽是 Morse 芽，x 为 f 的非退化临界点．于是定理 2.5.1 可表示成：

命题 2.5.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为任意 C^∞ 函数，则对每一 $\varepsilon>0$，存在$\mathbb{R}^n$ 上的线性函数 A，使得 $\|A\|<\varepsilon$，并且 $f+A$ 在它的每一奇点处的芽为 Morse 的．

(ii)设 $p\geqslant 2n$．若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为好映射，则依推论 2.5.1，每一个 $\Sigma^i(f)$是$\mathbb{R}^n$ 中的微分子流形，其余维数为 $i(p-n+i)\geqslant i(n+i)>n(i\neq 0)$．因此当 $i>0$ 时，$\Sigma^i(f)=\varnothing$，这说明 f 是浸入，由此我们得到著名的 Whitney 浸入定理的局部形式．

定理 2.5.2 设 $p\geqslant 2n$．

(i) 若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，则对每一 $\varepsilon>0$，存在 $A\in L(n,p)$，使得 $\|A\|<\varepsilon$ 并且$f+A$ 是一个浸入．

(ii)集$\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为浸入$\}$是 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集．

例 3 尖点三次线 $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\alpha(t)=(t^2,t^3)$，它不是浸入．设 λ 为较小的正数．令曲线 $\alpha_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\alpha_\lambda(t)=(t^2,t^3-\lambda t)$，易见 α_λ 是一个浸入，它是由 α 通过线性形变得到的．

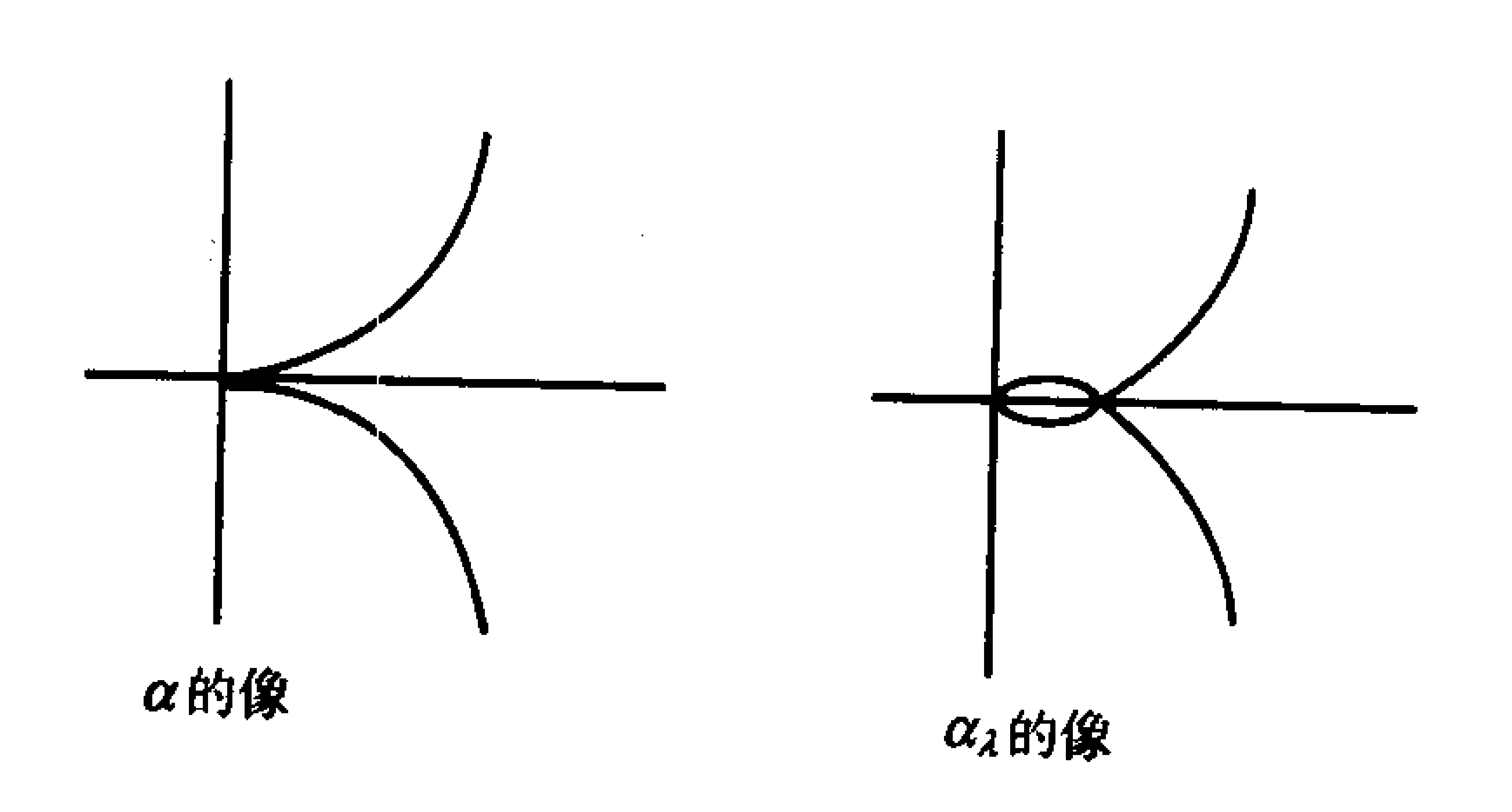


图 2.12

第三章　余维数不超过5的实值函数芽的分类

本章中心议题是对余维数≤5的实值函数芽进行分类，给出著名的Thom分类定理. 由于一个函数芽余维数有限等价于该函数芽关于右等价群是有限决定的，因此对分类问题的研究可限于多项式芽讨论. 并且有限决定性本身也是奇点理论中十分活跃的研究专题，§3.3对函数芽有限决定性的初步探讨有助于读者更好地理解映射芽有限决定性的一般理论. 为此需要包括代数与几何两个方面的准备，§3.1讨论了函数芽环上的模，§3.2从介绍单参数形变入手，建立了切空间概念.

§3.1　光滑函数芽环上的模

本节假定读者熟悉模论的初步知识，其实在前两章已接触了模的一些例子.

例1　环 ε_n 的每个理想是 ε_n-模，实向量空间则是模的特殊情形.

例2　考察 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽，其分量 $f_i:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 ε_n 中一元($i=1,\cdots,p$)，因此 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 属于 $\varepsilon_n\times\cdots\times\varepsilon_n$($p$ 个 ε_n 的直积). 记

$$\varepsilon(n,p)=\{(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽}\},$$

则它可等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$，这是秩为 p 的自由 ε_n-模.

例3　在§1.3中曾引入$(\mathbb{R}^n,0)$上的 C^∞ 向量场芽

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad X_i\in\varepsilon_n,\quad i=1,\cdots,n.$$

将$\mathbb{R}^n$ 上的 C^∞ 向量场在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽所成之集记为 $V(\mathbb{R}^n)$，则它是一个秩为 n 的自由 ε_n-模. 借助于 $V(\mathbb{R}^n)$的自由基$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$，将 $V(\mathbb{R}^n)$等同于 $\varepsilon_n^{\times n}=\underbrace{\varepsilon_n\oplus\cdots\oplus\varepsilon_n}_{n\text{个}}$. $V(\mathbb{R}^n)$的子模

$$\{X\in V(\mathbb{R}^n)\,\Big|\,X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial}{\partial x_i},X_i\in\mathscr{M}_n,i=1,\cdots,n\}$$

简记为 $\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n)$，它可等同于 $\mathscr{M}_n\cdot\varepsilon_n^{\times n}$.

现结合本章内容，介绍模论的有关知识. 首先陈述本书常常用到的一个漂亮结果，称之为 Nakayama 引理.

引理 3.1.1 设 A 是一个具有幺元素(记为 1)的交换环，I 为A 中的理想具有下列性质：对每一 $\alpha\in I$，$1+\alpha$ 是A 中的可逆元. 假设 M,N 为A-模 P 的子模，且 M 是有限生成的. 若 $M\subset N+I\cdot M$，则 $M\subset N$.

证 设 $m_1,\cdots,m_k$ 为M 的一组生成元. 如果我们能证明每一个 $m_i\in N$，那么引理得证. 依条件 $M\subset N+I\cdot M$，对每一 m_i，可找到 $n_i\in N$ 和$\alpha_i^j\in I(1\leqslant j\leqslant k)$，使得

$$m_i=n_i+\sum_{j=1}^{k}\alpha_i^j m_j,$$

或写为

$$\sum_{j=1}^{k}(\delta_i^j-\alpha_i^j)\cdot m_j=n_i,\quad i=1,\cdots,k,\tag{1}$$

其中 δ_i^j 为 Kronecker 符号. 令 $m=(m_1,\cdots,m_k)$，$n=(n_1,\cdots,n_k)$，$\Lambda=(\delta_i^j-\alpha_i^j)$为 A 上的$k\times k$ 矩阵，则(1)式可写为

$$\Lambda\cdot m=n.$$

如果能证明 Λ 是可逆矩阵，那么可以求解关于 $m_1,\cdots,m_k$ 的线性方程组(1)，使得每一 m_i 可表为诸 n_j 的线性组合，其系数取自A，从而每一 $m_i\in N$.

因 A 是有幺元素的交换环，Λ 是A 上的矩阵. 由线性代数

知，A 是可逆方阵当且仅当它的行列式 $\det A$ 是A 中可逆元. 而

$$\det A = 1 + \alpha, \quad \alpha \in I,$$

依假设，$1+\alpha$ 是A 中可逆元. 根据上面的分析，本引理得证.

本引理的一个特殊情形为命题 1.1.1. 应用该引理，有下列两个推论：

推论 3.1.1 设 M 为有限生成的 ε_n-模，则下列条件等价：

(a) M 由 $a_1, \cdots, a_k$ 生成.

(b) 实向量空间 $M/\mathcal{M}_n \cdot M$ 由诸 a_i 的投影 $\bar{a}_i$ 生成.

证 (a)⇒(b)显然.

(b)⇒(a) 令 $N = \varepsilon_n \cdot a_1 + \cdots + \varepsilon_n \cdot a_k$，它是 M 的 ε_n-子模. 条件 b)恰好表示

$$N + \mathcal{M}_n \cdot M = M,$$

据引理 3.1.1，$M \subset N$ 从而有 $N = M$.

注 若 M 是有限生成的 ε_n-模，则 $M/\mathcal{M}_n \cdot M$ 是有限维实向量空间，但其逆不真. 例如，设 I 为 ε_1 中理想，它由在 $0 \in \mathbb{R}$ 处(无穷次)平坦的函数芽组成(函数芽 f 为平坦芽是指 f 以及它的各阶导数在原点的值都为 0). I 可看成 ε_1-模，并且 $I = \mathcal{M}_1 \cdot I$，于是 $I/\mathcal{M}_1 \cdot I = 0$. 但是 I 不是有限生成的，否则按上述推论，$I = 0$. 然而由 $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$，$(x \neq 0)$ 和 $f(0) = 0$ 定义的函数芽 $f \in \varepsilon_1$ 是平坦的，因而 $I \neq 0$.

推论 3.1.2 条件如引理 3.1.1 所述. 若 A 为$\mathbb{R}$-代数，且

$$\dim_{\mathbb{R}} M \Big/ (N + I^{d+1} \cdot M) \leqslant d, \tag{2}$$

则 $I^d \cdot M \subset N$.

证 令

$$B_r = N + I^r \cdot M, \quad 0 \leqslant r \leqslant d + 1,$$

并规定 $I^0 = A$. 由(2)式知，诸子模 B_r 不可能全不同. 若 $B_r = B_s$，

$r<s$,则

$$I^r\cdot M\subset N+I^{r+1}\cdot M.$$

据引理 3.1.1, $I^r\cdot M\subset N$, $r<d+1$. 特别, $I^d\cdot M\subset N$.

定义 3.1.1 设 M 是一个具有有限基的自由 ε_n-模. 若商模 M/N 作为实向量空间是有限维的,则说 N 在 M 中具有有限余维. 在这种情形下,将商空间 M/N 的维数定义为 N 在 M 中的余维数,记为 $\mathrm{Codim}N$.

类似于推论 1.1.2,下面的命题为判断 N 在 M 中具有有限余维提供了一个有用的代数判别法.

命题 3.1.1 设 M 为自由 ε_n-模,具有有限基, $N\subset M$ 为 ε_n-子模,则 N 在 M 中具有有限余维的充要条件是存在正整数 k,使得

$$\mathscr{M}_n^k\cdot M\subset N.$$

证 充分性. 假设存在 $k\geqslant 1$ 使得 $\mathscr{M}_n^k\cdot M\subset N$,那么

$$\dim_{\mathbb{R}}M/N\leqslant\dim_{\mathbb{R}}M/\mathscr{M}_n^k\cdot M.$$

下证 $\dim_{\mathbb{R}}M/\mathscr{M}_n^k\cdot M<\infty$. 因为 M 是秩有限的自由 ε_n-模,可以假定 $M=\varepsilon_n^{\times s}$, s 为正整数. 而

$$\varepsilon_n^{\times s}\Big/\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon_n^{\times s}\cong\varepsilon_n\Big/\mathscr{M}_n^k\times\cdots\times\varepsilon_n\Big/\mathscr{M}_n^k(\text{带有 } s \text{ 个因式}),$$

并且每一个因式 $\varepsilon_n\Big/\mathscr{M}_n^k$ 是有限维实向量空间,因而积也是有限维的,于是 $\dim_{\mathbb{R}}M/N<\infty$.

必要性. 假定 N 在 M 中的余维有限. 考察 ε_n-子模的下降序列

$$M\supset N+\mathscr{M}_n\cdot M\supset N+\mathscr{M}_n^2\cdot M\supset\cdots\supset N,$$

易见从上述序列的某一项开始,往后的所有包含关系都变成相等

关系. 特别,存在 $k\geqslant 1$,使得

$$N+\mathcal{M}_n^k\cdot M=N+\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot M.$$

因 $\mathcal{M}_n^k\cdot M$ 是有限生成的,应用 Nakayama 引理于

$$\mathcal{M}_n^k\cdot M\subset N+\mathcal{M}_n\cdot(\mathcal{M}_n^k\cdot M),$$

便得出 $\mathcal{M}_n^k\cdot M\subset N$. 证毕.

为计算 N 在 M 中的余维数 $\operatorname{Codim}N$,令

$$c_k=\dim_{\mathbb{R}}\frac{N+\mathcal{M}_n^k\cdot M}{N+\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot M},\quad k=0,1,2,\cdots$$

c_k 表示 $N+\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot M$ 在 $N+\mathcal{M}_n^k\cdot M$ 中的余维数.

推论 3.1.3 在命题 3.1.1 的条件下,N 在 M 中具有有限余维当且仅当除了有限个外,所有的 c_k 均为 0. 并且在这种情形下,

$$\operatorname{Codim}N=\text{有限和}\sum_k c_k.$$

证 设 N 在 M 中具有有限余维,据命题 3.1.1,存在正整数 k,使得 $\mathcal{M}_n^k\cdot M\subset N$,于是对所有 $j\geqslant k$,$c_j=0$.

反之,若 $c_k=0$,则 $N+\mathcal{M}_n^k\cdot M=N+\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot M$,从而 $\mathcal{M}_n^k\cdot M\subset N$. 再次应用命题 3.1.1,可见 N 在 M 中余维有限.

本推论中的第二个断言直接由命题 3.1.1 的证明得到.

§3.2 光滑函数芽的切空间和余维数

3.2.1 切空间

ε_n 作为实向量空间是无限维的. 如何在函数芽空间 ε_n 中定义在 $f\in\varepsilon_n$ 处的"切空间"呢? 类似于有限维情形那样,将 f 处的"切向量"理解为 ε_n 中过 f 的"光滑道路" $t\mapsto f_t\in\varepsilon_n$ 的等价类,其中 $f_0=f$,而所说的切空间正是由所有这样的切向量组成. 现在我们对上述直观描述给予精确定义.

定义 3.2.1 设 $f\in\varepsilon_n$ 是 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数芽. 如果 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$(坐标为 $t,x_1,\cdots,x_n$)上的 C^∞ 函数在原点处的芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 满足条件

$$F_0(x)=F(0,x)=f(x),$$

那么 F 叫做 f 的 1-参数形变.

对形变 F,选取它的一个代表,仍记为 $F:U\to\mathbb{R}$,这里 U 为 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中原点的开邻域. 定义 $F_t:U_t\to\mathbb{R}$,其中

$$U_t=\{x\in\mathbb{R}^n\,\big|\,(t,x)\in U\},$$

$$F_t(x)=F(t,x),\quad x\in U_t,$$

那么 F 可解释为 n 元函数 $F_t:U_t\to\mathbb{R}$ 的 1-参数族, t 为参数. 值得注意的是,除 $F_0=f$ 外,当 $t\neq 0$ 时, F_t 不能看作 ε_n 的元素.

定义 3.2.2 $f\in\varepsilon_n$ 的两个 1-参数形变 F 和 G 是同构的,如果存在微分同胚芽 $\Phi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$,使得

(i) $\Phi(t,x)=(t,\Phi(t,x)),\Phi(0,x)=(0,x)$,

(ii) $G=F\circ\Phi$.

令 $\pi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为标准投影,则

$$\pi\circ\Phi=\pi,$$

说明 Φ 将纤维 $\{t\}\times\mathbb{R}^n$ 映为自身,因此说 Φ 是一个 $\mathbb{R}$-水平保持的微分同胚芽. 而 $\Phi(0,x)=(0,x)$ 说明 Φ 在纤维 $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ 上的限制是一个恒同映射芽,因此 Φ 又叫做 L_n 中的恒同映射芽的 1-参数开折.

具有性质(i)的微分同胚芽 Φ 的全体形成群 L_{1+n} 的一个子群,记为 $L_{n,1}$. 下面给出群 $L_{n,1}$ 的无穷小描述. 设 $\Phi(t,x)=(t,\Phi(t,x))\in L_{n,1}$,定义向量场芽 X_Φ 为

$$(t,x)\mapsto X_\Phi(t,x)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x).$$

换言之,

$$X_\Phi = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1}$$

其中 Ψ_i 为 Ψ 的第 i 个分量. X_Φ 正是在 §1.3 中讨论过的. 映射 $\Phi \mapsto X_\Phi$ 是从群 $L_{n,1}$ 到形如

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

的向量场芽所成集上的双射. $\Phi \in L_{n,1}$ 可用下列几何性质来刻画: 它将直线族$\mathbb{R} \times \{x\}$变换为向量场 $X = X_\Phi$ 的一族积分曲线.

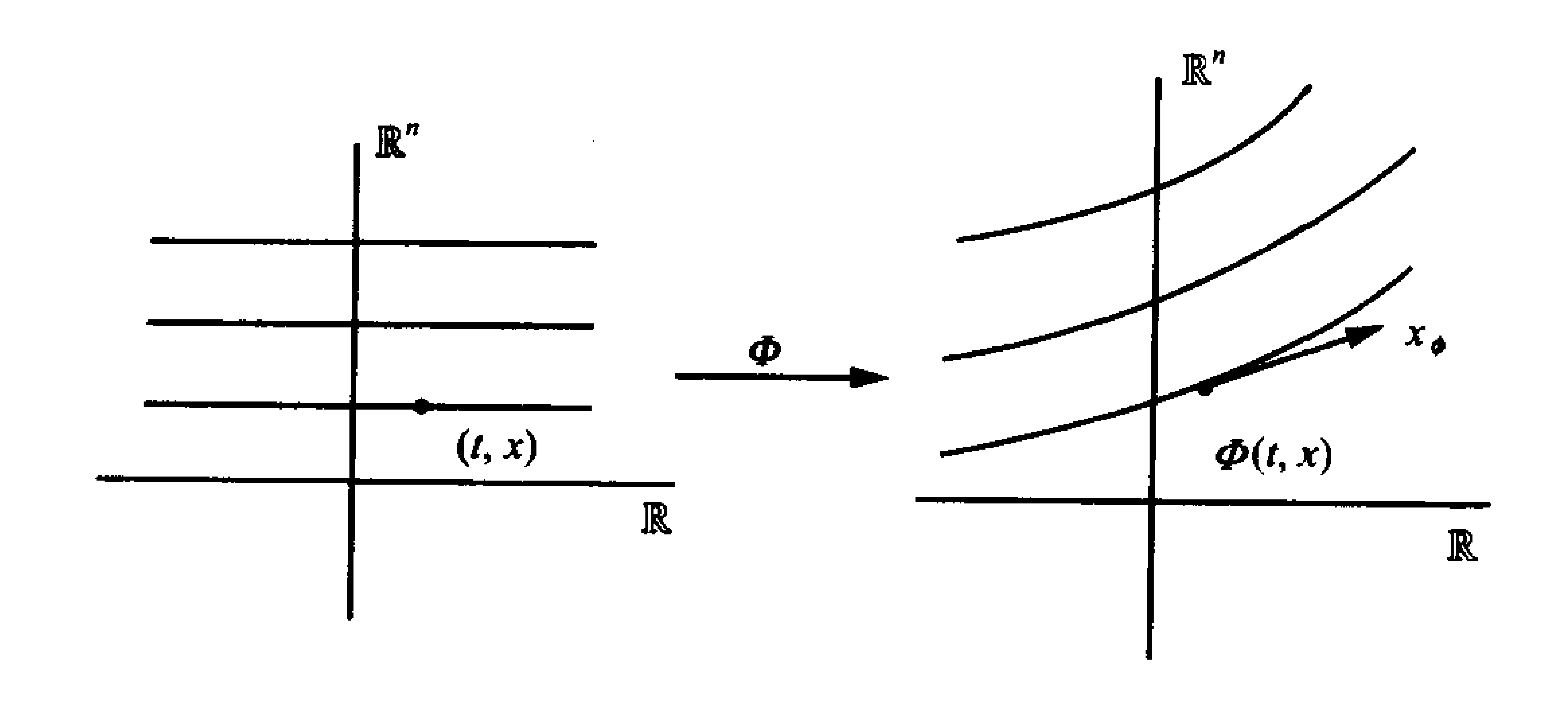


图 3.1

定义 3.2.3 $f \in \varepsilon_n$ 的 1-参数形变 F 叫做平凡的, 如果它同构于常值形变$(t,x) \mapsto f(x)$.

命题 3.2.1 $f \in \varepsilon_n$ 的 1-参数形变 F 是平凡的当且仅当存在$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0)$上的向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

使得

$$X \cdot F = 0.$$

证 $\Rightarrow$ f 的 1-参数形变 F 是平凡的，则存在 $\Phi \in L_{n,1}$，使得

$$F(\Phi(t,x)) = f(x),$$

对 t 求导，得

$$X_\Phi \cdot F = 0,$$

其中 X_Φ 如(1)式所述.

$\Leftarrow$ 通过积分向量场 X 便得到 $\Phi \in L_{n,1}$，并且有 $X_\Phi = X$. 条件 $X \cdot F = 0$ 说明 F 在 X 的每一条轨道上为常值，

$$F(\Phi(t,x)) = F(\Phi(0,x)), \quad \forall t \in (\mathbb{R},0)$$

即

$$F(\Phi(t,x)) = F(0,x) = f(x),$$

而这正说明 F 是平凡的.

平凡性条件 $X \cdot F = 0$ 可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i}. \tag{2}$$

如前所述，F 看做 n 元函数 $F_t: U_t \to \mathbb{R}$ 的 1-参数族，其中 U_t 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集. 令

$$X_t(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

它是定义在 U_t 上的向量场. 式(2)现可写成

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = -X_t \circ F_t.$$

当 $t=0$ 时，上式变为

$$\left.\frac{\partial F_t}{\partial t}\right|_{t=0} = -X_0 \circ f$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} X_i(0,x)\frac{\partial f}{\partial X_i},$$

上式右边的诸 $X_i(0,x)$及$\frac{\partial f}{\partial x_i}$均属于$\varepsilon_n$. 而$\left.\frac{\partial F_t}{\partial t}\right|_{t=0}$理解为在 f 处的一个切向量,这个切向量属于 f 的 Jacobi 理想. 反过来,若$\left.\frac{\partial F_t}{\partial t}\right|_{t=0}\in J(f)$,可以证明形变 F 是平凡的(留作练习).

基于上述考虑,我们有下列

定义 3.2.4 设 $f\in\varepsilon_n$. f 的 Jacobi 理想 $J(f)$叫做 f 的切空间. f 的余维数定义为f 的切空间$J(f)$在 ε_n 中的余维数,即

$$\mathrm{Codim} f = \dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n / J(f).$$

若 Codim$f$ 是有限数,称 f 为具有有限余维的函数芽,否则说 f 的余维无限.

3.2.2 余维数

命题 3.2.2 设 $f,g\in\varepsilon_n$. 若 f 与 g 同构,则 Codim$f$ = Codim$g$.

证 若 f 与g 同构,则存在 $\Phi\in L_n$,使得 $g=f\circ\Phi$. 而可逆芽 Φ 诱导环的自同构$\Phi^*:\varepsilon_n\to\varepsilon_n$. 如果断言

$$\Phi^*(J(f)) = J(g)$$

成立,可导出商空间 $\varepsilon_n/J(f)$与 $\varepsilon_n/J(g)$是同构的,因而结论成立,余下证明断言. 依链法则,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\circ\Phi\right)\cdot\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Phi^*\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i},$$

因此 $J(g)\subset\Phi^*(J(f))$.

同理可证 $J(f)\subset(\Phi^{-1})^*(J(g))=(\Phi^*)^{-1}(J(g))$，因而 $\Phi^*(J(f))\subset J(g)$.

据§1.3中公式(7)，$\mathscr{M}_n\cdot J(f)$表示轨道 $L_n\cdot f$ 在 f 处的切空间，因此将理想 $J(f)$ 和 $\mathscr{M}_n\cdot J(f)$ 作比较是有意义的. 显然 $J(f)\supset\mathscr{M}_n\cdot J(f)$. 若 $f\in\mathscr{M}_n$ 是非奇异的，即假定 $f\in\mathscr{M}_n$ 且 $f\notin\mathscr{M}_n^2$，据命题1.4.2，f 同构于一坐标函数芽，因此 $J(f)=\varepsilon_n$ 且 $J(f)=\mathscr{M}_n\cdot J(f)+\mathbb{R}$，此时 $\mathrm{Codim}f=0$.

命题 3.2.3 设 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 且 $\mathrm{Codim}f<\infty$，则

$$J(f)=\mathscr{M}_n\cdot J(f)\oplus\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},$$

并且

$$\mathrm{Codim}\mathscr{M}_n\cdot J(f)=\mathrm{Codim}J(f)+n.$$

证 设 $\lambda\in J(f)$，则

$$\lambda=\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad u_i\in\varepsilon_n.$$

又 $u_i(x)=u_i(0)+v_i(x)$，其中 $v_i\in\mathscr{M}_n$，因此

$$\lambda=\sum_{i=1}^n u_i(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n v_i\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

这说明

$$J(f)=\mathscr{M}_n\cdot J(f)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},$$

其中$\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$表示由$\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$生成的实向量空间. 如果能证明 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关，并且 $\mathscr{M}_n\cdot J(f)\cap\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}=\{0\}$，这里0为 ε_n 中的零函数，那么本命题结论

得证.

反设存在不全为 0 的实数 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$以及函数芽 $\gamma_i\in\mathscr{M}_n(i=1,\cdots,n)$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

则

$$X\cdot f=0,$$

其中向量场 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i-\gamma_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的值不为 0.

做坐标变换,令

$$y_i=x_i,\quad i=1,\cdots,n-1,$$

$$y_n=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\gamma_i)x_i,$$

这里假设 $\alpha_n\neq0$.易见

$$X=\frac{\partial}{\partial y_n},$$

且由 $X\cdot f=0$ 知,f 同构于这样一个芽,它不依赖于最后一个坐标.

由于 $f\in\mathscr{M}_n^2$,所以 $J(f)\subset I$,其中 $I=\{g\in\varepsilon_n\mid g(0,\cdots,0,x_n)=0\}$为 ε_n 中理想.显然

$$\varepsilon_n/I\cong\varepsilon_{x_n},$$

而 ε_{x_n} 作为实向量空间是无限维的,因此 $J(f)$在 ε_n 中的余维无限,与 $\mathrm{Codim}f<\infty$矛盾.

命题 3.2.4 若 $f\in\mathscr{M}_n^3$ 具有有限余维,则

$$1+n+\frac{n(n+1)}{2}\leqslant\mathrm{codim}\mathscr{M}_n\cdot J(f)=n+\mathrm{Codim}J(f).$$

证 为简便起见,省去 $\mathscr{M}_n$ 的下标 n.由 $f\in\mathscr{M}^3$可得 $\mathscr{M}\cdot J(f)$

$\subset \mathcal{M}^3$.

考虑理想的下降序列

$$\varepsilon_n \underset{c_0}{\supset} \mathcal{M} \underset{c_1}{\supset} \mathcal{M}^2 \underset{c_2}{\supset} \mathcal{M}^3 \supset \mathcal{M}^4 + \mathcal{M} \cdot J(f) \supset \cdots,$$

这里 $c_0 = 1, c_1 = n, c_2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$,于是

$$\text{Codim}\mathcal{M} \cdot J(f) \geqslant 1 + n + \frac{n(n+1)}{2}.$$

例 1 求芽 $f(x) = x^{s+1}$ 的余维数,这里 s 为正整数.

解 $J(f) = \langle x^s \rangle_{\varepsilon_1}$. 对 $0 \leqslant k \leqslant s-1, x^k \notin J(f) + \mathcal{M}^{k+1}$,但 $x^s \in J(f)$,所以 $\text{Codim} f = s$.

利用推论 3.1.3 来计算 $f \in \varepsilon_n$ 的余维数,必须依次算出 c_0, $c_1, \cdots$,直到出现零为止,这里 $c_0 = \dim \varepsilon_n / \mathcal{M}_n = 1$,而对于 $k \geqslant 1$,

$$c_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{J(f) + \mathcal{M}_n^k}{J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}}.$$

若能找出 $J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$ 在 $J(f) + \mathcal{M}_n^k$ 中的补空间的基,则易求出 c_k. 为此对于每一个 n 元 k 次单项式,考察它是否位于 $J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$ 中. 下面通过例 2 来介绍具体计算过程.

例 2 计算芽 $f(x, y) = x^2 y + y^4$ 的余维数,这里

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle_{\varepsilon_2} = \langle 2xy, x^2 + 4y^3 \rangle_{\varepsilon_2}.$$

列出下表

$$x \quad y$$

$$\underline{x^2} \quad \underline{xy} \quad y^2$$

$$\underline{x^3} \quad \underline{x^2 y} \quad \underline{xy^2} \quad y^3$$

$$\underline{x^4} \quad \underline{x^3 y} \quad \underline{x^2 y^2} \quad \underline{xy^3} \quad \underline{y^4}$$

$$\underline{x^5} \quad \underline{x^4 y} \quad \underline{x^3 y^2} \quad \underline{x^2 y^3} \quad \underline{xy^4} \quad \underline{y^5}$$

先看表中第1行. 易见 $x, y \notin J(f)+\mathscr{M}^2$. 表中第2行 x^2, xy, y^2 中的前两个位于 $J(f)+\mathscr{M}^3$, 因

$$x^2 = \frac{\partial f}{\partial y} - 4y^3, \quad xy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x},$$

在 x^2, xy 的下方划上横线. 但 $y^2 \notin J(f)+\mathscr{M}^3$. 接着在第3行的 x^3, x^2y, xy^2 的下方, 第4行的 x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3 的下方, 第5行的 $x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4$ 的下方都划上横线, 等等.

三次单项式中仅 y^3 需讨论, 我们有 $y^3 \notin J(f)+\mathscr{M}^4$. 然后四次单项式中仅需考虑 y^4. 因

$$y^4 = \frac{1}{4}y\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{8}x\frac{\partial f}{\partial x},$$

从而所有的四次单项式都位于 $J(f)+\mathscr{M}^5$, 并且在 y^4, y^5 的下方划上横线.

在上述表中到第4行为止未划横线的单项式是 x, y, y^2, y^3, 因此 f 的余维数等于未划横线的单项式个数加1, 即

$$\text{Codim} f = 5.$$

顺便我们证明了 $\mathscr{M}^4 \subset J(f)+\mathscr{M}^5$, 因而 $\mathscr{M}^4 \subset J(f)$.

作为练习, 计算芽 $f(x,y) = x^3 + xy^3$ 的余维数(答案: $\text{Codim} f = 7$).

命题 3.2.5 若函数芽 $f \in \varepsilon_n$ 的余维数为正整数, 则 $0 \in \mathbb{R}^n$ 为孤立奇点.

证明留作练习.

该命题提供了一个简单方法用以识别具有无限余维的函数芽. 例如由 $f_1(x,y) = x^2$ 及 $f_2(x,y) = x^2y^2$ 定义的函数芽均无有限余维, 因为原点是这两个芽的非孤立奇点.

§3.3 有限决定的函数芽

从本节开始, 我们将讨论 ε_n 中具有低余维的函数芽的分类问

题.为了与后面的术语相一致,将函数芽按同构关系分类改说为按右等价关系分类.

众所周知,分类问题一直是数学中最基本也是最重要问题.由于 ε_n 是无限维实向量空间,对函数芽进行分类,一个基本想法是将无限维化简为有限维来处理,为此要求考虑的函数芽余维数较小.我们先看看一些特殊情形.

若 $f\in\mathcal{M}_n$ 是非奇异芽,命题 1.4.2 告诉我们,f 右等价于一坐标函数芽,此时 $\mathrm{Codim}f=0$. 定理 1.4.1 则指出,若 $f\in\varepsilon_n$ 为 Morse 芽(此时 $\mathrm{Codim}f=1$),则 f 与它的 Hessian 右等价,并且 Morst 芽在右等价群 $\mathscr{R}(=L_n)$作用下的分类归结为非退化二次型在一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$作用下的分类问题.因此人们自然会猜想:对"足够好"的 $f\in\varepsilon_n$,通过取导网,f 有可能与它的某一 Taylor 多项式右等价.这样一来,对满足一定条件的函数芽进行分类可归结为由多项式组成的有限维向量空间中的分类问题.现在引入下面的定义.

定义 3.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数芽,k 为非负整数.如果 ε_n 中与 f 具有相同 k-导网的芽 g 皆右等价于 f,则说 f 关于群 $\mathscr{R}$ 是 k-决定的,记作 f 是 k-$\mathscr{R}$-决定的.本章简记 f 是 k-决定的.

由此可见,k-决定的函数芽由它以及它的阶数不大于 k 的所有偏导数在原点的值完全决定,至多相差一右等价.

本节的基本结果是关于 k-决定性的下列充分条件.

定理 3.3.1 设 $f\in\varepsilon_n$.若 $\mathcal{M}_n^k\subset\mathcal{M}_n\cdot J(f)$,则 f 是 k-决定的.

证 设 $g\in\varepsilon_n$ 具有与 f 相同的 k-导网,需证 g 与 f 右等价.将 f 和 g 设想为实向量空间 ε_n 中的两"点",用一条"直线"连接它们,定义函数芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,[0,1]\times 0)\to\mathbb{R}$ 为

$$F(t,x)=f_t(x)=(1-t)f(x)+tg(x).$$

把$\{f_t\}$看做是 n 元函数的 1-参数族,其中 $f_0=f,f_1=g$.如果能够证明在这一族中的任意两个芽是右等价的,结果自然得到.因为

$[0,1]$是紧的,只需证明:对任意 $a\in[0,1]$,当 t 与 a 相邻近时,f_t 与 f_a 右等价. 令 F^a 表示 F 在点 $(a,0)$ 处的芽限制,下面只需证明 $F^a:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))\to\mathbb{R}$ 是平凡芽.

F^a 为平凡的是指存在$\mathbb{R}$-水平保持的 C^∞ 映射芽 $\Phi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))$,它可表示为

$$\Phi(t,x)=(t,\Psi(t,x)),$$

且满足下列条件:

(a) $\Phi(a,x)=(a,x)$,

(b) $F(\Phi(t,x))=F(a,x)$.

此外还附上条件

(c) $\Psi(t,0)=0$.

记 $\Phi_t(x)=\Psi(t,x)$. 条件(a)表示 $\Phi_a=$恒同. 因 Φ_t 的 Jacobi 矩阵的行列式在原点的值 $\det D\Phi_t(0)$ 连续地依赖于 t,又 $\det D\Phi_a(0)=1$,所以当 t 与 a 靠得近时,Φ_t 是可逆的. 由此还说明 Φ 是微分同胚芽. 条件(b)可写为 $f_t\circ\Phi_t=f_a$,因此当 t 接近于 a 时,f_t 与 f_a 右等价.

F^a 视为 f_a 的 1-参数形变,据命题 3.2.1,F^a 是平凡的$\Leftrightarrow$存在向量场芽 $X=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$,使得

(d) $\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial F^a}{\partial x_i}=-\frac{\partial F^a}{\partial t}$.

考虑到条件(c),还要求 X_i 满足

(e) $X_i(t,0)=0,\quad i=1,\cdots,n$.

也就是

(e′) $X_i\in\mathcal{M}_n\cdot\varepsilon_{1+n},\quad i=1,\cdots,n$,

因此对任意 $a\in[0,1]$,证明 F^a 是平凡芽归结为构造满足条件(d),(e′)的向量场芽 X. 因下面的论证不依赖于 a 的值的具体选取,不妨取 $a=0$. 而对于上标 a 则省去.

由于 $j^kg=j^kf$,所以 $g-f\in\mathcal{M}_n^{k+1}$. 又

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(1-t)f + tg] = g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(g - f) \in \mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{M}_{1+n},$$

从而由条件 $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$可推出

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle \subset \mathcal{M}_n$$

$$\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle \varepsilon_{1+n} + \mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{M}_{1+n},$$

据 Nakayama 引理,

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle \varepsilon_{1+n}.$$

于是

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{M}_n \cdot \langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \rangle \varepsilon_{1+n}$$

说明存在 $X_i \in \mathcal{M}_n \cdot \varepsilon_{1+n} (i = 1, \cdots, n)$,使得

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} X_i(t, x) \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

令 $X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,可见条件(d)和(e′)被满足.按照前面约定,对任意 $a \in [0,1]$,已构造了符合条件(d)和(e′)的向量场芽 X,因而 F^a 是平凡的.根据上面的分析,定理得证.

据 Nakayama 引理,定理中的条件 $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f)$等价于条件 $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1}$.前者说明在 f 处的轨道切空间 $T\mathbb{R}(f) = \mathcal{M}_n \cdot J(f)$在 ε_n 中具有有限余维,后者便于实际计算与论证推导.

例 1 芽 $f(x, y) = x^3 + y^3$ 是 3-决定的,因为 $J(f) = \langle x^2, y^2 \rangle \varepsilon_2$,$\mathcal{M}_2 \cdot J(f) = \langle x^3, x^2 y, xy^2, y^3 \rangle \varepsilon_2 = \mathcal{M}_2^3$.

$f\in\varepsilon_n$ 为k-决定的另一充分条件是

定理 3.3.2 设 $f\in\varepsilon_n$. 若 $\mathscr{M}_n^{k+1}\subset\mathscr{M}_n^2\cdot J(f)$,则 f 是k-决定的.

证明提示与定理 3.3.1 的证明几乎相同,只需对证明过程中的最后部分进行验证.

例 2 设芽 $f(x,y)=x^4+y^4$,则

$$J(f)=\langle x^3,y^3\rangle\varepsilon_2,$$

$$\mathscr{M}_2\cdot J(f)=\langle x^4,x^3y,xy^3,y^4\rangle\varepsilon_2.$$

显然 $\mathscr{M}_2^4\subset\mathscr{M}_2\cdot J(f)$不成立,不能直接应用定理 3.3.1 推出 f 是 4-决定的.但是

$$\mathscr{M}_2^2\cdot J(f)=\langle x^5,x^4y,x^3y^2,x^2y^3,xy^4,y^5\rangle\varepsilon_2=\mathscr{M}_2^5,$$

据定理 3.3.2,f 是 4-决定的.

本例表明,条件 $\mathscr{M}_n^{k+1}\subset\mathscr{M}_n^2\cdot J(f)$弱于条件 $\mathscr{M}_n^k\subset\mathscr{M}_n\cdot J(f)$,因此定理 3.3.2 是定理 3.3.1 的一种改进形式.

定义 3.3.2 设 $f\in\varepsilon_n$. f 是有限决定的是指对某一正整数k,f 是k-决定的.

命题 3.3.1 设 $f\in\varepsilon_n$ 是k-决定的,则

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\subset\mathscr{M}_n\cdot J(f)$$

证明留作练习.

由定理 3.3.1 和命题 3.3.1,容易推得 $f\in\varepsilon_n$ 是有限决定的$\Leftrightarrow f$ 具有有限余维,因此对 ε_n 中具有有限余维的函数芽的研究化简为对ε_n 中多项式芽的研究,从而余维数较小的函数芽的分类问题只需就多项式芽来讨论.

§3.4 余维数不大于 5 的函数芽的分类

本节对余维数不超过 5 的光滑函数芽依右等价关系进行分

类. 当余维数为 0 或 1 时,我们已经讨论过. 下面对余维数不小于 2 的函数芽 $f\in\varepsilon_n$ 进行探讨,易见 $f\in\mathscr{M}_n^2$,且 $0\in\mathbb{R}^n$ 是 f 的退化临界点,因而 f 的 Hessian 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0)\right)$$

的秩 $r<n$. 整数 $c=n-r$ 叫做 f 的余秩,记为 $\mathrm{Corank}f$.

当 f 为 Morse 芽时,$\mathrm{Corank}f=0$. 另外约定非奇异芽的余秩为 0.

3.4.1 分裂引理

命题 3.4.1 设 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 是一个有限决定的函数芽,其余秩为 c,则 f 右等价于下列函数芽:

$$g(x_1,\cdots,x_c)+\delta_{c+1}x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2, \tag{1}$$

其中 $g\in\mathscr{M}_c^3$, $\delta_i=\pm1(i=c+1,\cdots,n)$.

证 给定两个芽 $g,h\in\varepsilon_n$. 如果存在可逆芽 $\Phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得 $g\circ\Phi$ 和 h 具有相同的 k-导网,记为 $g\underset{k}{\sim}h$,易见"$\underset{k}{\sim}$"是一个等价关系.

应用归纳法,我们试图证明:存在芽 $g_k\in\mathscr{M}_c^3$,其中 g_k 是一个次数不大于 k 的多项式,使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)\underset{k}{\sim}g_k(x_1,\cdots,x_c)+\delta_{c+1}\cdot x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2, \tag{2}$$

由此可证明本命题结论成立. 事实上,因为 f 是有限决定的,必存在正整数 k_0,使得 f 右等价于它的 k_0 阶 Taylor 多项式.

归纳证明从 $k=2$ 开始. f 的 2-导网是一个含有 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次型,它的秩 $r=n-c$. 由高等代数知识,只需做一非退化线性坐标变换,该二次型右等价于

$$\delta_{c+1}\cdot x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2,$$

其中 $\delta_i=\pm1(i=c+1,\cdots,n)$,因此取 $g_2=0$.

现归纳假定(2)式成立,有

$$f(x_1,\cdots,x_n)\underset{k+1}{\sim}g_k(x_1,\cdots,x_c)+\delta_{c+1}x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2 \\ +H(x_1,\cdots,x_n), \tag{3}$$

其中 H 是一个$(k+1)$次齐次多项式.将 H 写为下列形式:

$$H(x_1,\cdots,x_n)=h(x_1,\cdots,x_c)+x_{c+1}H_{c+1}(x_1,\cdots,x_n) \\ +\cdots+x_nH_n(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 h 是一个$(k+1)$次齐次多项式,$H_{c+1},\cdots,H_n$ 为 k 次齐次多项式.定义映射 $\Phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$为

$$\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)=x_i,\quad i=1,\cdots c,$$

$$\Phi_j(x_1,\cdots,x_n)=x_j+\frac{1}{2\delta_j}H_j(x_1,\cdots,x_n),\quad j=c+1,\cdots,n.$$

Φ 的 Jacobi 矩阵在 $0\in\mathbb{R}^n$ 的值是单位矩阵,因而 Φ 是可逆芽.在(3)式右边用 $\Phi_1,\cdots,\Phi_n$ 代替 $x_1,\cdots,x_n$,得到

$$f(x_1,\cdots,x_n)\underset{k+1}{\sim}g_{k+1}(x_1,\cdots,x_c)+\delta_{c+1}x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2,$$

其中 $g_{k+1}=g_k+h$.这样便完成了归纳证明,本命题得证.

本命题称为分裂引理,在下面的讨论中,常用到这一技巧.

命题 3.4.2 设 $f\in\mathcal{M}_n^2$ 具有形式(1),则 f 在 ϵ_n 中的余维数等于 g 在 ϵ_c 中的余维数.

证明留作练习

命题 3.4.3 设 $f\in\epsilon_n$.若 f 的余维数不大于 6,则 f(在点 0)的余秩小于或等于 2.

证 若 $\mathrm{Codim}f\leqslant 1$,则 $\mathrm{Corank}f=0$.现假定 $2\leqslant\mathrm{Codim}f\leqslant 6$.由分裂引理,$f$ 右等价于

$$g(x_1,\cdots,x_c)+\delta_{c+1}\cdot x_{c+1}^2+\cdots+\delta_n x_n^2,$$

其中 $c=\mathrm{Corank}f$,$g\in\mathcal{M}_c^3$.据命题 3.4.2,

$$\mathrm{Codim} f = \mathrm{Codim} g,$$

再依命题 3.2.4,

$$\mathrm{Codim} g = \mathrm{Codim} J(g) \geqslant 1 + \frac{c(c+1)}{2},$$

因此由 Codim$g \leqslant 6$ 得 $c \leqslant 2$. 证毕.

下面分别就余秩为 1 或 2 讨论函数芽的分类.

3.4.2 余秩为 1 的函数芽的分类

定理 3.4.1 在 ε_n 中,每一个余秩为 1 且余维数 $k \geqslant 2$ 的函数芽 f 右等价于下列函数芽之一:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + x_n^{k+1}, \quad \delta_i = \pm 1, \quad k \text{ 为偶数},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x_n^{k+1}, \quad \delta_i = \pm 1, \quad k \text{ 为奇数}.$$

证 因 f 具有有限余维,必为有限决定的. 据分裂引理, f 右等价于

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 + g(x_n),$$

其中 $g \in \mathcal{M}_1^3$ 且具有余维数 k. 将 x_n 改写为 x.

断言:存在最小整数 j, 使得 $g \in \mathcal{M}_1^j$ 且 $g \notin \mathcal{M}_1^{j+1}$. 若不然,则对所有 j, 皆有 $J(g) \subset \mathcal{M}_1^j$, 因而 Codim$g \geqslant$ Codim$\mathcal{M}_1^j = j$, 这说明 g 无有限余维数. 于是由断言可推知

$$g(x) = x^j h(x), \quad h(0) \neq 0.$$

通过计算, Codim$g = j - 1$, 从而 $j = k + 1$.

现在 $g \in \mathcal{M}_1^{k+1}$ 且 $g \notin \mathcal{M}_1^{k+2}$, 据命题 1.4.1 便得到 g 或右等价于 x^{k+1} 或右等价于 $\pm x^{k+1}$, 这要视 k 为偶数或奇数而定. 因而对于 $f \in \varepsilon_n$ 来说,本定理结论为真.

特别,有下表:

余秩	余维数	芽	名称
1	2	x^3	折叠
	3	$\pm x^4$	尖点
	4	x^5	燕尾
	5	$\pm x^6$	蝴蝶

3.4.3 余秩为 2、余维数不大于 5 的函数芽的分类

设 $f\in\varepsilon_n$ 的余秩为 2，且 $\text{Codim}f\leqslant 5$. 由分裂引理，f 右等价于下列芽：

$$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2+g(x_{n-1},x_n),$$

其中 $g\in\mathcal{M}_2^3$. 据命题 3.4.2 和 3.2.4，

$$\text{Codim}J(f)=\text{Codim}J(g)\geqslant 4,$$

因此在余秩等于 2、余维数不大于 5 的条件下，对函数芽 $f\in\varepsilon_n$ 分类简化为对函数芽 $g\in\mathcal{M}_2^3$ 在余维数等于 4 或 5 时的分类. 改记 x_{n-1},x_n 为 x 和 y.

定理 3.4.2 在 ε_2 中，每一个余维数为 4 的函数芽 $g\in\mathcal{M}_2^3$ 右等价于下列芽之一：

$$x^3\pm xy^2.$$

证 将 $\mathcal{M}_2$ 写为 $\mathcal{M}$，由 $g\in\mathcal{M}^3$ 知

$$\mathcal{M}\cdot J(g)\subset\mathcal{M}^3.$$

考虑理想的下降序列

$$\varepsilon_2\underset{1}{\supset}\mathcal{M}\underset{2}{\supset}\mathcal{M}^2\underset{3}{\supset}\mathcal{M}^3\underset{c_3}{\supset}\mathcal{M}^4+\mathcal{M}\cdot J(g)\supset\cdots,$$

据命题 3.2.3，$\text{Codim}\mathcal{M}\cdot J(g)=6$，因而 $c_3=0$（依推论 3.1.3）. 利用 Nakayama 引理，有

$$\mathscr{M}^3 \subset \mathscr{M} \cdot J(g).$$

定理 3.3.1 告诉我们,g 是 3-决定的,必右等价于它的三阶 Taylor 多项式. 由于 $g \in \mathscr{M}^3$,它的三阶 Taylor 多项式是三次齐次多项式. 这样一来,余维数为 4 的函数芽 $g \in \mathscr{M}^3$ 的分类便化简为二个变量 x, y 的三次齐次多项式在一般线性群 $GL(2,\mathbb{R})$作用下的分类,并且要求它们的标准形(即每一等价类的代表)满足下列等式:

$$\mathscr{M} \cdot J(g) = \mathscr{M}^3. \tag{4}$$

易见每一个非零三次齐次多项式恰好右等价于下列标准形之一(这里所说的右等价是指在群 $GL(2,\mathbb{R})$作用的意义下):

(a) $P(x,y) = x^3 - xy^2 = x(x-y)(x+y)$,其特征是方程 $P(x,y)=0$确定 3 条相异实直线;

(b) $P_1(x,y) = x^3 + xy^2 = x(x^2+y^2)$,方程 $P_1(x,y)=0$ 确定一条实直线和两条复共轭直线;

(c) $P_2(x,y) = x^2y$,方程 $P_2(x,y)=0$ 确定一条实直线和另一条二重实直线;

(d) $P_3(x,y) = x^3$,$P_3 = 0$ 确定一条三重实直线.

然后逐一验证,仅(a)和(b)(非退化情形)满足等式(4).

定理 3.4.3 在 ε_2 中,每一个余维数为 5 的函数芽 $g \in \mathscr{M}^3$,右等价于下列芽之一:

$$x^2 y \pm y^4.$$

证 显然 $\mathscr{M} \cdot J(g) \subset \mathscr{M}^3$. 考虑理想的下降序列

$$\varepsilon_2 \underset{1}{\supset} \mathscr{M} \underset{2}{\supset} \mathscr{M}^2 \underset{3}{\supset} \mathscr{M}^3 \underset{c_3}{\supset} \mathscr{M}^4 + \mathscr{M} \cdot J(g) \underset{c_4}{\supset} \mathscr{M}^5 + \mathscr{M} \cdot J(g) \supset \cdots,$$

因 $\mathrm{Codim}\mathscr{M} \cdot J(g) = 7$,故 $c_3 = 1, c_4 = 0$. 而

$$c_3 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{M}^3}{\mathscr{M}^4 + \mathscr{M} \cdot J(g)} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{P_2^3}{P_2^3 \cap j^3(\mathscr{M} \cdot J(g))},$$

其中 P_2^3 表示变量 x, y 的三次齐次多项式所成之向量空间,交 P_2^3

$\cap j^3(\mathcal{M}\cdot J(g))$仅依赖于 g 在原点的三次 Hessian. 容易验证:由 $c_3=1$ 可推出 g 的三次 Hessian 右等价(在群 $GL(2,\mathbb{R})$作用意义下)于"抛物型"x^2y.

由 $c_4=0$ 导出 $\mathcal{M}^4\subset\mathcal{M}\cdot J(g)$,因而 g 是4-决定的,它右等价于 j^4g. 而 g 的四阶 Taylor 多项式具有形式

$$x^2y+P_4(x,y), \tag{5}$$

其中 P_4 是 x,y 的四次齐次多项式. 我们将(5)式写为

$$x^2y+\{ay^4+by^3x+x^2P_2(x,y)\},$$

这里 P_2 是 x,y 的二次型.

对上式中的 x,y 做可逆坐标变换,将所得的结果取 4-导网必与原来的芽右等价,这是因为 4-决定性在右等价作用下保持不变. 特别,用 $x-\frac{b}{2}y^2$ 代替 x,用 $y-P_2(x,y)$代替 y,将所得结果取 4-导网,可得到与 g 右等价的芽

$$x^2y+ay^4,$$

这里 $a\neq0$. 否则 $0\in\mathbb{R}^2$ 是芽 x^2y 的非孤立奇点,据命题 3.2.5,芽 x^2y 因而g 均具有无限余维,与 $\operatorname{Codim}g=5$ 矛盾!

最后用 px 代x,用 qy 代y,并选取适当的常数 p 和q,便得到与 g 右等价的芽

$$x^2y\pm y^4,$$

这里"±"号依赖于 a 的符号. 此外,x^2y+y^4 和 x^2y-y^4 不是右等价的(留作练习).

由分裂引理以及定理 3.4.2 和 3.4.3,我们有

定理 3.4.4 在 ε_n 中,每一个余秩为 2,余维数不大于 5 的函数芽 $f\in\mathcal{M}_n^2$ 右等价于下列芽之一:

$$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2+x_{n-1}^3\pm x_{n-1}x_n^2,\quad \delta_i=\pm1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2 + x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^4, \quad \delta_i = \pm 1.$$

特别,有下表:

余秩	余维数	芽	名称
2	4	$x^3 - xy^2$	椭圆脐点
	4	$x^3 + xy^2$	双曲脐点
	5	$x^2y \pm y^4$	抛物脐点

余维数不大于5的函数芽依右等价关系分类,定理3.4.1和3.4.4连同命题1.4.2,定理1.4.1给出了完整的描述,它是著名的Thom分类定理所包含的内容,本书第六章还将继续深入介绍.

例 设$f:(\mathbb{R}^2,0)\to\mathbb{R}$定义为$f(x,y)=x^4+x^2y^2-2x^2y-xy^2+y^2$.经计算,得

$$\mathrm{Codim} f = 4, \quad \mathrm{Corank} f = 1,$$

于是原点是燕尾型奇点.

方程$f=0$定义的实代数曲线如图3.2所示.

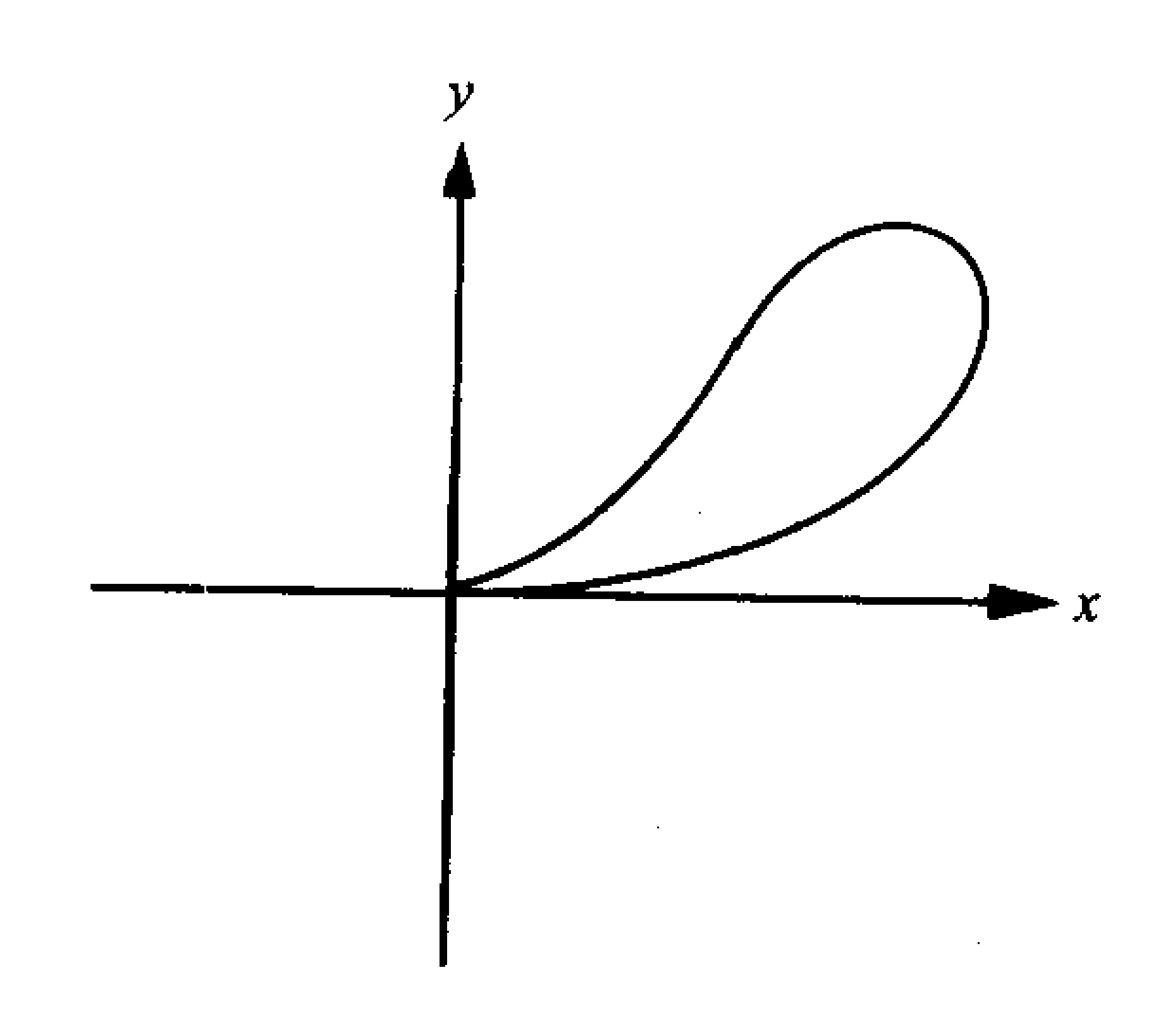


图3.2

第四章　除法定理

对于域$\mathbb{F}$上的一元多项式环$\mathbb{F}[x]$已经建立了整除性理论，它与整数的整除理论完全平行．该理论的一个基本结果现陈述如下：设$f(x)$与$g(x)$是$\mathbb{F}[x]$中的任意两个多项式，且$g(x)\neq 0$，那么在$\mathbb{F}[x]$中可以找到惟一的多项式$q(x)$和$r(x)$，使得

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

并且或者$r(x)=0$，或者$r(x)$的次数小于$g(x)$的次数．现考虑光滑实值函数芽环，自然问：在该环中是否有类似的结果呢？本章的目的是推导实光滑函数芽的除法定理．下一章将利用它来证明 Malgrange 预备定理．

本章安排如下．在§4.1 中介绍一般的除法定理及多项式除法定理，证明它们二者是等价的．接着在§4.2 中讨论多项式除法定理．为帮助读者理解，首先对复变量的解析函数进行讨论，然后讨论实变量的光滑函数．对于后者，我们采用 Nirenberg 的方法来证明多项式除法定理，而把要用到的 Nirenberg 扩张引理放在§4.3 中予以讨论．

§4.1　除法定理与多项式除法定理

4.1.1　定理的陈述

在叙述除法定理之前，先看一个例子．

例 1　设$F(t,x)$是定义在原点$(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$的某一邻域$U$内的光滑函数．对函数$F$做 Taylor 展开，记$r(t,x)$为$F(t,x)$在点$(0,x)\in U$关于$t$的$(k-1)$阶 Taylor 多项式，则

$$r(t,\ x)=\sum_{j=0}^{k-1} r_j(x)t^j,$$

其中 $r_j(x)=\frac{1}{j!}\frac{\partial^j F}{\partial t^j}(0,\ x)(j=0,1,\cdots,k-1)$. 于是函数 $F(t,\ x)-r(t,\ x)$在$(\{0\}\times\mathbb{R}^n)\cap U$ 的每一点关于 t 是$(k-1)$-平坦的. 由定理1.1.3知,存在定义在点$(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的邻域 $V(\subset U)$上的光滑函数 $q(t,\ x)$,使得

$$F(t,\ x)-r(t,\ x)=t^k q(t,\ x),$$

或

$$F(t,\ x)=t^k q(t,\ x)+\sum_{j=0}^{k-1} r_j(x)\cdot t^j. \tag{1}$$

从这个例子可见,单项式 t^k 具有除法性质,用芽的语言可表示为:对任意 $F\in\varepsilon_{t,x}$,存在 $q\in\varepsilon_{t,x}$及 $r_j\in\varepsilon_x(0\leqslant j\leqslant k-1)$,使得(1)式成立. 进而问:比单项式芽 t^k 更一般的函数芽是否也具有上述除法性质呢?

定义 4.1.1 如果光滑函数芽 $P:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to\mathbb{R}$ 满足下列条件:

(i) $P(t,\ 0)=t^k p(t),\ p\in\varepsilon_t,k$ 为自然数,

(ii) $p(0)\neq 0$,

则称 P 关于 t 是 k 阶正则的.

换言之,$P\in\varepsilon_{t,x}$ 关于 t 是 k 阶正则的,若 $P(0,\ 0)=0$, $\frac{\partial^j P}{\partial t^j}(0,\ 0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant k-1$,且$\frac{\partial^k P}{\partial t^k}(0,\ 0)\neq 0$.

定理 4.1.1(Mather 的除法定理) 设 $P\in\varepsilon_{t,x}$关于 t 是 k 阶正则的,则对每一 $F\in\varepsilon_{t,x}$,存在 $Q\in\varepsilon_{t,x}$及 $r_j\in\varepsilon_x$, $0\leqslant j\leqslant k-1$,使得

$$F(t,\ x)=P(t,\ x)\cdot Q(t,\ x)+r(t,\ x),$$

$$r(t, x) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) t^j,$$

其中$(t, x) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0,0))$.

注 由 J.N.Mather 给出的除法定理证明(见文献[46])可导出比上述定理更一般的结论. 不仅如此,他还证明了整体的除法定理.

例 2 设 $P, F \in \varepsilon_2$ 定义为 $P(t, x) = t^2 - x, F(t, x) \equiv 0$, 则 P 关于 t 是 2 阶正则的. 令 $Q_1(t, x) = r_1(t_1, x) \equiv 0$,有

$$F(t, x) = P(t, x) Q_1(t, x) + r_1(t, x).$$

又令

$$r_2(t, x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

则 $r_2 \in \varepsilon_2$,并且可以取 $Q_2 \in \varepsilon_2$,使得 $P(t, x) Q_2(t, x) = -r_2(t, x)$,于是又有

$$F(t, x) = P(t, x) Q_2(t, x) + r_2(t, x),$$

这说明在除法定理中,Q 与 r 的选取不是惟一的.

推论 4.1.1 设 $P \in \varepsilon_{t, x}$关于 t 是 k 阶正则的,则存在 $Q \in \varepsilon_{t,x}$及$a_j \in \varepsilon_x (j = 0, 1, \cdots, k-1)$,使得

$$P(t, x) Q(t, x) = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x) t^j, \tag{2}$$

并且

$$Q(0, 0) \neq 0, \; a_j(0) = 0, \; 0 \leqslant j \leqslant k-1. \tag{3}$$

证 取 $F(t, x) = t^k$, F 可视为$\varepsilon_{t, x}$中成员. 由除法定理,存在 $Q \in \varepsilon_{t, x}$及$r_j \in \varepsilon_x (0 \leqslant j \leqslant k-1)$,使得

$$t^k = P(t, x) Q(t, x) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x) t^j.$$

令 $a_j(x)=-r_j(x)(0\leqslant j\leqslant k-1)$,代入上式即得(2)式. 在(2)式中令 $x=0$ 便可知(3)式成立.

应指出的是,若 $\widetilde{P}(t,x)=t^k+\sum_{j=0}^{k-1}a_j(x)t^j$ 满足条件 $a_j\in\mathscr{M}_x$ $(0\leqslant j\leqslant k-1)$,则 $\widetilde{P}\in\varepsilon_{t,x}$关于 t 也是 k 阶正则的,并且它是 t 的 k 次多项式,其最高项系数为 1. 本推论说明,任意一个关于 t 是 k 阶正则的函数芽 $P\in\varepsilon_{t,x}$与上述 $\widetilde{P}$ 仅相差一个非零因子,即 P 乘上一个恰当的非零因子 $Q\in\varepsilon_{t,x}$后,便具有最简形式 $\widetilde{P}$. 此外,利用下面的定理 4.1.2(多项式除法定理)也可得到该推论(见命题 4.1.1 证明中第一步).

令 $P_k:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 为多项式,定义为

$$P_k(t,\lambda)=t^k+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i t^i, \tag{4}$$

这里 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1})\in\mathbb{R}^k$.

定理 4.1.2(多项式除法定理) 设 $F(t,x)\in\varepsilon_{t,x}$为任意光滑函数芽,则存在 $Q(t,x,\lambda)$, $r(t,x,\lambda)\in\varepsilon_{t,x,\lambda}$,使得

$$F(t,x)=P_k(t,\lambda)\cdot Q(t,x,\lambda)+r(t,x,\lambda),$$

$$r(t,x,\lambda)=\sum_{i=0}^{k-1}r_i(x,\lambda)t^i,\ r_i\in\varepsilon_{x,\lambda},\ 0\leqslant i\leqslant k-1.$$

4.1.2 除法定理与多项式除法定理的等价性

由定理 4.1.1 易导出定理 4.1.2. 事实上,将 F,P_k 视为 $\varepsilon_{t,x,\lambda}$中的成员,$P_k$ 在$\varepsilon_{t,x,\lambda}$中关于$t$ 是k 阶正则的,应用除法定理可知定理 4.1.2 的结论真. 然而我们更感兴趣的是其逆命题,这就是

命题 4.1.1 多项式除法定理⇒除法定理.

证 我们把证明分为两步:

第一步 设 $P\in\varepsilon_{t,x}$关于t 是k 阶正则的. 用 P_k 除P,据定理 4.1.2,得

$$P(t, x) = (t^k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i t^i) Q(t, x, \lambda) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(x, \lambda) t^i. \tag{5}$$

在上式中,令 $x=0, \lambda=0$,得

$$P(t, 0) = t^k Q(t, 0, 0) + \sum_{i=0}^{k-1} r_i(0, 0) t^i,$$

而 $P(t, 0) = t^k p(t)$,其中 $p \in \varepsilon_t$ 且 $p(0) \neq 0$. 根据 Taylor 展开式的惟一性,有

$$r_i(0, 0) = 0 (0 \leqslant i \leqslant k-1), \ Q(0,0,0) = p(0) \neq 0. \tag{6}$$

注意到函数 P 的变化只依赖于 t 和 x,而与 λ 无关. 将(5)式两边对 λ_j 求导,并令 $x=0, \lambda=0$,得

$$0 = t^j Q(t, 0, 0) + t^k \frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(t, 0, 0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) t^i,$$

对 $Q(t,0,0)$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial \lambda_j}(t,0,0)$ 做 Taylor 展开,再一次应用 Taylor 展开式的惟一性,由上式可推出

$$\frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0) = \begin{cases} 0, & i < j, \\ -Q(0,0,0), & i = j, \end{cases} \tag{7}$$

从而 $k \times k$ 矩阵 $\left(\frac{\partial r_i}{\partial \lambda_j}(0, 0)\right)$ 是下三角矩阵,对角线上的元素均为 $-Q(0,0,0)$,因此是可逆的. 由隐函数定理,方程组

$$\begin{cases} r_0(x, \lambda) = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ r_{k-1}(x, \lambda) = 0, \end{cases}$$

有且仅有一个局部解 $\lambda = \lambda(x)$ 满足 $\lambda(0) = 0$(据(6)式),并且

$\lambda(x)$是 C^∞ 的. 令 $\lambda=\lambda(x)=(\lambda_0(x),\cdots,\lambda_{k-1}(x))$,将它代入(5)式得

$$P(t,x)=\Big(t^k+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i(x)t^i\Big)Q(t,x,\lambda(x)). \tag{8}$$

因为 $Q(0,0,0)\neq 0$, $\dfrac{1}{Q(t,x,\lambda(x))}\in\varepsilon_{t,x}$,所以

$$t^k+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i(x)t^i=\frac{P(t,x)}{Q(t,x,\lambda(x))}. \tag{9}$$

第二步 任取 $F\in\varepsilon_{t,x}$. 用 P_k 除 F,据定理 4.1.2,

$$F(t,x)=P_k(t,\lambda)\cdot S(t,x,\lambda)+\sum_{i=0}^{k-1}s_i(x,\lambda)t^i,$$

将 λ 用第一步得到的 $\lambda(x)$代替,得

$$F(t,x)=\Big(t^k+\sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i(x)t^i\Big)S(t,x,\lambda(x))$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}s_i(x,\lambda(x))t^i,$$

再将(9)式代入上式,得

$$F(t,x)=P(t,x)\cdot\frac{S(t,x,\lambda(x))}{Q(t,x,\lambda(x))}+\sum_{i=0}^{k-1}s_i(x,\lambda(x))t^i.$$

令 $q(t,x)=\dfrac{S(t,x,\lambda(x))}{Q(t,x,\lambda(x))}$, $\bar{s}_i(x)=s_i(x,\lambda(x))$,则 $q\in\varepsilon_{t,x}$, $\bar{s}_i\in\varepsilon_x(0\leqslant i\leqslant k-1)$,上式可写为

$$F(t,x)=P(t,x)q(t,x)+\sum_{i=0}^{k-1}\bar{s}_i(x)t^i.$$

这正是我们所要证的.

由多项式除法定理很容易得到 Whitney 关于偶函数的一个结论,通常称为 Whitney 引理,见文献[69].

例 3 设 $F\in\varepsilon_{t,x}$,则存在光滑函数芽 s_1, s_2:$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(0,$

0))→$\mathbb{R}$,使得

$$F(t, x) = ts_1(t^2, x) + s_2(t^2, x).$$

特别,当 F 是 t 的偶函数,即 $F(t, x)=F(-t, x)$时,

$$F(t, x) = s_2(t^2, x).$$

证 取 $P_2(t, \lambda)=t^2+\lambda_1 t+\lambda_0$,应用定理4.1.2于 F,则存在 $q, r:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2, (0,0,0))\to\mathbb{R}$,使得

$$F(t, x) = (t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0)q(t, x, \lambda_0, \lambda_1) + r(t, x, \lambda_0, \lambda_1),$$

$$r(t, x, \lambda_0, \lambda_1) = r_0(x, \lambda_0, \lambda_1) + r_1(x, \lambda_0, \lambda_1)t.$$

在上式中取 $\lambda_0=-t^2$,$\lambda_1=0$,得

$$F(t, x) = r_0(x, -t^2, 0) + r_1(x, -t^2, 0)t.$$

令 $s_1(u, x)=r_1(x, -u, 0)$, $s_2(u, x)=r_0(x, -u, 0)$, 则

$$F(t, x) = ts_1(t^2, x) + s_2(t^2, x).$$

特别地,若 $F(-t, x)=F(t, x)$,由上式立即可推出 $F(t, x)=s_2(t^2, x)$.

§4.2 多项式除法定理的证明

本节证明实光滑函数芽的多项式除法定理. 为帮助读者理解该定理的证明要领,先就复变量的解析函数予以讨论,给出复解析情形下多项式除法定理的证明,然后再转到实光滑情形.

4.2.1 复解析情形

令 $P_k^{\mathrm{C}}:\mathbb{C}\times\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}$ 为复变量 w 的复系数多项式,定义为 $P_k^{\mathrm{C}}(w, \lambda)=w^k+\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j w^j$,其中 $\lambda=(\lambda_0,\cdots,\lambda_{k-1})\in\mathbb{C}^k$.

定理 4.2.1 设 $F(w, z)$是定义在点$(0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ 的一邻域内的复解析函数,则存在点$(0,0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k$ 的某邻域上的复解析函数 $q(w, z, \lambda)$和 $r(w, z, \lambda)$,使得

$$F(w, z) = P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)q(w, z, \lambda) + r(w, z, \lambda),$$

$$r(w, z, \lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} r_j(z, \lambda)w^j,$$

其中每一 r_j 是定义在点$(0,0)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^k$ 的一邻域上的解析函数.

证 在复平面$\mathbb{C}$上选取原点的"足够小"邻域,并且在该邻域上取一条简单闭曲线 γ,使得原点落在 γ 的内部. 由 Cauchy 积分公式,若 w 位于曲线γ 内,则

$$F(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\eta, z)}{\eta - w}d\eta.$$

容易验证 $P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda) - P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)$可以表为

$$P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda) - P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda) = (\eta - w)\sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda)w^j,$$

其中 s_j 是解析的$(j=0,\cdots,k-1)$,因此

$$\frac{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}{\eta - w} = \frac{P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda)w^j.$$

此外,要求当 λ 与 $0\in\mathbb{C}^k$ 充分接近时,$P_k^{\mathbb{C}}(\eta,\lambda)$的零点均不位于曲线 γ 上,显然满足这一要求的 γ 是容易选取的,于是

$$\begin{aligned}
F(w, z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\eta, z)}{\eta - w}\cdot\frac{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)}\cdot\left[\frac{P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)}{\eta - w} + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda)w^j\right]d\eta \\
&= \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\eta, z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta, \lambda)(\eta - w)}d\eta\right\}P_k^{\mathbb{C}}(w, \lambda)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\eta,z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta,\lambda)}\cdot s_j(\eta,\lambda)\mathrm{d}\eta\right]\cdot w^j,$$

令

$$q(w,z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\eta,z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta,\lambda)(\eta-w)}\mathrm{d}\eta,$$

$$r_j(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F(\eta,z)}{P_k^{\mathbb{C}}(\eta,\lambda)}\cdot s_j(\eta,\lambda)\mathrm{d}\eta,\ j=0,\cdots,k-1,$$

$$r(w,z,\lambda)=\sum_{j=0}^{k-1}r_j(z,\lambda)w^j,$$

则 q，r 为所求.

4.2.2 实光滑情形

我们采用 Nirenberg 的方法来证明实光滑函数芽的多项式除法定理. 从定理 4.2.1 的证明中可见,Cauchy 积分公式是主要工具,现在转到定理 4.1.2 的证明,相应地需要一个类似的公式,这正是下面引理 4.2.1 所述. 其次,还需要一个扩张引理,即 Nirenberg 扩张引理. 在叙述这两个引理之前,先做一点准备.

将$\mathbb{C}$等同于$\mathbb{R}^2$,复数 $z=x+iy$ 对应于有序实数对$(x,y)\in\mathbb{R}^2$,并且 x 和 y 可以用 z 及 $\bar{z}(=x-iy)$表示,即 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$,$y=-\frac{i}{2}(z-\bar{z})$. 现假设 f: $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 为光滑函数,规定$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}$要求满足求导链法则,即

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

若 F:$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 由 $F=f+ig$ 所给定,其中 f, g:$\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数,则

$$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}+i\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right],\quad(1)$$

于是$\frac{\partial F}{\partial\bar{z}}\equiv0$ 当且仅当 F 是解析的.

引理 4.2.1 设 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为 C^∞ 函数(视为$\mathbb{R}^2$ 到自身的 C^∞ 映射),γ 为$\mathbb{C}$ 中简单闭曲线,其内部记为 D,则对 $w\in D$,

$$F(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(z)}{z-w}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)\frac{\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z}}{z-w}. \quad (2)$$

特别,当 F 在区域 D 中解析时,上述公式便变为 Cauchy 积分公式.

证 设 F 由 $f+ig$ 给出. 对 $w\in D$,取 $\varepsilon(>0)$小于点 w 到曲线 γ 的距离. 从 D 中挖去以点 w 为心、以 ε 为半径的圆盘,余下部分记为 D_ε,D_ε 的边界 γ_ε 是 γ 与上述小圆盘的边界圆 S_ε 之并. 应用 Green 公式及(1)式于 $F=f+ig$,得

$$\int_{\gamma_\varepsilon} F\mathrm{d}z=\int_{\gamma_\varepsilon}(f+ig)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$$

$$=2i\iint_{D_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=-\iint_{D_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z},$$

最后一个等式成立是因为 $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=-2i\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

用$\frac{F(z)}{z-w}$代替上式中$F(z)$,并注意$\frac{1}{z-w}$在D_ε 上解析及

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{F(z)}{z-w}\right)=\frac{1}{z-w}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z),$$

因而

$$-\iint_{D_\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)\frac{\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}\bar{z}}{z-w}=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{F(z)}{z-w}\mathrm{d}z$$

$$=\int_\gamma \frac{F(z)}{z-w}\mathrm{d}z-\int_{S_\varepsilon}\frac{F(z)}{z-w}\mathrm{d}z, \quad (3)$$

又

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{F(z)}{z-w}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{F(w+\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta})}{\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta}}\mathrm{d}(\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta})=\int_0^{2\pi} iF(w+\varepsilon \mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

令 $\varepsilon \to 0$,(3)式左边趋于 $-\iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)\ \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z-w}$, 右边趋于 $\int_\gamma \frac{F(z)}{z-w}dz - 2\pi i F(w)$, 从而(2)式成立.

引理 4.2.2(Nirenberg 扩张引理) 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to\mathbb{C}$ 为 C^∞ 复值函数芽,则存在 C^∞ 函数芽 $G:(\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k,(0,0,0))\to\mathbb{C}$,使得

(i) $G(t,x,\lambda)=F(t,x)$, $(t,x,\lambda)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k,(0,0,0))$,

(ii) $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$的各阶导数在$\{\operatorname{Im} z=0\}$上为零,

(iii) $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$的各阶导数在$\{P_k^{\mathbb{C}}(z,\lambda)=0\}$上为零,其中 $P_k^{\mathbb{C}}(z,\lambda)=z^k+\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_j z^j$.

由于这个引理证明太长,我们把它安排在§4.3. 下面给出多项式除法定理的另一形式.

定理 4.2.2 设 $F(t,x)$是定义在点$(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的一邻域内的光滑复值函数,则存在点$(0,0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$ 的某一邻域上的光滑复值函数 $Q(t,x,\lambda)$和 $r(t,x,\lambda)$,使得

(i) $F(t,x)=P_k(t,\lambda)Q(t,x,\lambda)+r(t,x,\lambda)$,

(ii) $r(t,x,\lambda)=\sum_{j=0}^{k-1}r_j(x,\lambda)t^j$,其中每一 r_j 是定义在点$(0,0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$ 的一邻域上的光滑复值函数.

此外,若 F 是实值的,则 Q 和 r 可选取为实值的.

注 "此外"部分可以通过令方程(i)两边的实部相等得到(注意 P_k 是实值的).

证 设 $F(t,x)$如定理中所述,依引理 4.2.2,存在光滑复值函数 $G(z,x,\lambda)$,它定义在点$(0,0,0)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k$ 的某一邻域

上,满足该引理的条件(i)~(iii). 再由引理4.2.1,有

$$
\begin{aligned}
&G(z, x, \lambda)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\eta, x, \lambda)}{\eta - z}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial G}{\partial \bar{\eta}}(\eta, x, \lambda)\frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta - z}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\eta, x, \lambda)P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)(\eta - z)}d\eta\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{(\partial G/\partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda)P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)(\eta - z)}d\eta \wedge d\bar{\eta},
\end{aligned} \tag{4}
$$

又

$$
P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda) = P_k^{\mathbf{C}}(z, \lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} s_j(\eta, \lambda)z^j(\eta - z),
$$

代入(4)式,得

$$
G(z, x, \lambda) = P_k^{\mathbf{C}}(z, \lambda)Q(z, x, \lambda) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(x, \lambda)z^j, \tag{5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Q(z, x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\eta, x, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)} \cdot \frac{d\eta}{(\eta - z)}\\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{(\partial G/\partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)} \cdot \frac{d\eta \wedge d\bar{\eta}}{\eta - z},\\
r_j(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(\eta, x, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)} \cdot s_j(\eta, \lambda)d\eta\\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{(\partial G/\partial \bar{\eta})(\eta, x, \lambda)}{P_k^{\mathbf{C}}(\eta, \lambda)}s_j(\eta, \lambda)d\eta \wedge d\bar{\eta},
\end{aligned}
$$

其中 $j=0,\cdots,k-1$. 取 $z=t\in\mathbb{R}$, $G(t,x,\lambda)=F(t,x)$,又当 $\lambda\in\mathbb{R}^k$ 时,$P_k^{\mathbb{C}}(t,\lambda)=P_k(t,\lambda)$,所以由(5)式推得本定理结论成立(请读者补述省去的一些证明细节).

§4.3 Nirenberg 扩张引理的证明

为证明 Nirenberg 扩张引理,先证 3 个引理以作准备. 本节材料主要取自文献[27].

引理 4.3.1(Borel 引理) 设 $f_0(x)$, $f_1(x)$,…是定义在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的一邻域 U 上的一列 C^∞ 函数,则存在定义在点 $(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的某个邻域上的 C^∞ 函数 $F(t,x)$,使得

$$\frac{\partial^l F}{\partial t^l}(0,x)=f_l(x)\ \forall\, l.$$

证 取 $\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数,使得

$$\rho(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\dfrac{1}{2},\\ 0, & |t|\geqslant 1.\end{cases}$$

注意可找到常数 $C_r>0$,使得 $\rho(t)$ 的 r 阶导数满足 $\rho^{(r)}(t)\leqslant C_r\rho(t)(r=0,1,2,\cdots)$,并且 $\rho^{(0)}(t)=\rho(t)$.

令

$$F(t,x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\rho(\mu_l t)f_l(x)t^l, \tag{1}$$

其中 $\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_l,\cdots$ 为正实数的递增序列,并且当 $l\to+\infty$ 时,$\mu_l\to+\infty$. 因为当 $|t|>\dfrac{1}{\mu_l}$ 时,$\rho(\mu_l t)=0$,因此(1)式右边只有有限个项不为 0,$F(t,x)$ 的定义对所有 t 均有意义,并且当 $t\neq0$ 时 F 是光滑的.

由于$\mathbb{R}^n$ 是局部紧致的,故存在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的紧致邻域 K,使得

$K \subset U$. 以下将所有的 f_l 限制在 K 上,并且在$\mathbb{R} \times K$ 上讨论 F. 我们将通过选取适当的正数列$\{\mu_l\}$,使由(1)式定义的 F 满足引理要求.

现对(1)式右边的通项求导数. 设 $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. 当 $s < l$ 时,有

$$\left| \frac{\partial^{s+|\alpha|}}{\partial t^s \partial x^\alpha} \left(\frac{1}{l!} \rho(\mu_l t) f_l(x) t^l \right) \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f_l(x) \right| \cdot \sum_{r=0}^{s} \frac{s! C_{s-r}}{r!(s-r)!(l-r)!} \rho(\mu_l t) \mu_l^{s-r} |t|^{l-r}, \tag{2}$$

注意到当$|t| > \mu_l^{-1}$ 时,$\rho(\mu_l t) = 0$,因此存在常数 $M_l \geqslant 1$,使得(2)式右边不超过 M_l / μ_l^{l-s}. 现取 $\mu_l > 2^l M_l$,则 $M_l / \mu_l^{l-s} \leqslant M_l / \mu_l < \frac{1}{2^l}$. 从而可推知,对(1)式右边逐项求导所得的级数在$\mathbb{R} \times K$ 上一致收敛,因此 F 是$\mathbb{R} \times K$ 上的 C^∞ 函数. 此外,容易验证$\frac{\partial^l F}{\partial t^l}(0, x) = f_l(x)$.

引理 4.3.2 设 V 和 W 是$\mathbb{R}^n$ 的子空间满足 $V + W = \mathbb{R}^n$,又设 g 与 h 是定义在点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的一邻域上的 C^∞ 函数. 如果对每一多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$,以及 $V \cap W$ 中的所有 x,有

$$\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial x^\alpha}(x),$$

则存在定义在 $0 \in \mathbb{R}^n$ 的某一邻域上的 C^∞ 函数 F,使得对所有 α,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial x^\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^\alpha}(x), & 若\ x \in V, \\ \dfrac{\partial^{|\alpha|} h}{\partial x^\alpha}(x), & 若\ x \in W. \end{cases}$$

证 只需就 $h\equiv 0$ 证明该引理就行了. 事实上,若 F_1 是 $g-h$ 和零函数的扩张,则 $F=F_1+h$ 便是 g 与 h 的扩张. 因此下面假定 $h\equiv 0$.

在 $\mathbb{R}^n$ 上选取坐标 $y_1,\cdots,y_n$,使得 $V=\{y\in\mathbb{R}^n \mid y_1=\cdots=y_j=0\}$, $W=\{y\in\mathbb{R}^n \mid y_{j+1}=\cdots=y_k=0\}$. 令

$$F(y)=\sum_{\substack{|\alpha|=0\\ \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_j,0,\cdots,0)}}^{\infty}\frac{y^\alpha}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^\alpha}(0,\cdots,$$

$$0,y_{j+1},\cdots,y_n)\rho\Big(\mu_{|\alpha|}\sum_{i=1}^{j}y_i^2\Big),\tag{3}$$

其中 ρ 如引理 4.3.1 的证明中所述,且正数序列 $\{\mu_{|\alpha|}\}$ 递增地趋于 ∞. 如同上一引理那样选取诸 $\mu_{|\alpha|}$,要求它们快速递增以保证由(3)式定义的 F 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的某一邻域内是 C^∞ 的.

余下验证 F 具有所要求的性质. 若 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in W$,则 $y_{j+1}=\cdots=y_k=0$. 这时 $\frac{\partial^{|\beta|}F}{\partial y^\beta}(y)$ 中的每一项必包含形如

$$\frac{\partial^{|\gamma|}g}{\partial y^\gamma}(0,\cdots,0,y_{k+1},\cdots,y_n)$$

的因子. 因 $(0,\cdots,0,y_{k+1},\cdots,y_n)\in V\cap W$,该因子等于 0(依假设),于是 $\frac{\partial^{|\beta|}F}{\partial y^\beta}(y)=0$. 另一方面,若 $y\in V$,则 $y_1=\cdots=y_j=0$. 又

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\rho\Big(\mu_{|\alpha|}\sum_{i=1}^{j}y_i^2\Big)\Big|_{y_1=\cdots=y_j=0}=\begin{cases}1, & \gamma=0,\\ 0, & \gamma\neq 0,\end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial^{|\beta|}F}{\partial y^\beta}(y)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y^\beta}\Big(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^\alpha}(y)\Big)\Big|_{y_1=\cdots=y_j=0}.$$

设 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,易见若 $\beta_i\neq\alpha_i$ 对某一 $i\leqslant j$,则在上述级数中

的相应项为 0. 实际上,非零项仅为$\frac{\partial^{|\beta|}g}{\partial y^{\beta}}(y)$,因此 F 是所要求的扩张. 证毕.

前两个引理都是扩张引理,第三个引理涉及到解某种偏微分方程的"初值问题".

引理 4.3.3 设 $f(x)$是定义在 $0\in\mathbb{R}^n$ 的某邻域上的 C^∞ 复值函数,X 为$\mathbb{R}^n$ 上的一个复系数 C^∞ 向量场,

$$X(x)=\sum_{j=1}^{n}X_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

其中 $X_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}(j=1,\cdots,n)$,则存在定义在 $0\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的一邻域上的 C^∞ 复值函数 $F(t,x)$,使得

(a) $F(0,x)=f(x)$ 对所有 x,

(b) $\frac{\partial F}{\partial t}$和$XF=\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial F}{\partial X_j}$在点$(0,x)$处的各阶导数相等.

证 依引理 4.3.1,可以选取一个定义在点 $0\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的一邻域上的 C^∞ 复值函数 F,它具有下列形式:

$$F=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\rho(\mu_k t)X^k f, \tag{4}$$

易见 F 满足(a)与(b).

引理 4.2.2 的证明 对 k 使用归纳法. 当 $k=0$ 时,$P_k^{\mathbb{C}}(z)\equiv 1$. 设 $z=t+is$,则

$$i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial s}+i\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

取 $X=i\frac{\partial}{\partial t}$. 由引理 4.3.3,对 C^∞ 函数 $F(t,x)$,存在 C^∞ 函数 $G(z,x)$,使得 $G(t,x)=F(t,x)$,其中 $t\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^n$,并且 $\partial G/\partial s$与$XG=i\frac{\partial}{\partial t}G$ 在 $s=0$ 处的各阶导数相等,因而 $\partial G/\partial\bar{z}$ 在

$\{\operatorname{Im} z=0\}$上的各阶导数均为零. 这说明引理在 $k=0$ 时是对的.

现假定 $k-1$ 时结论成立,下面证明本引理对 k 也是正确的. 我们证明存在 C^∞ 函数 $g(z, x, \lambda)$和 $h(z, x, \lambda)$($(z, x, \lambda)\in \mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k$),满足

(i) g 和 h 在集$\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)=0\}$上的各阶导数均相等;

(ii) h 是 F 的扩张,即 $h(t, x, \lambda)=F(t, x)$,其中 $t\in\mathbb{R}$;

(iii) $\partial h/\partial\bar{z}$ 在$\{\operatorname{Im} z=0\}$上各阶导数为零;

(iv) 令 $M=h\mid\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)=0\}$, 则 $\partial M/\partial\bar{z}$ 在 $\left\{\dfrac{\partial P_k^{\mathbb{C}}}{\partial z}(z, \lambda)=0\right\}$上各阶导数为零;

(v) $\partial g/\partial\bar{z}$ 在$\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)=0\}$上各阶导数为零.

倘若这样的 g 和 h 存在,我们立即可推出本引理结论. 令 $u=P(z, \lambda)\equiv P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)$,这里 $P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)=z^k+\sum\limits_{j=0}^{k-1}\lambda_j z^j$,又令 $\lambda'=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1})$. 在$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{k-1}$上作坐标变换 $(z, \lambda_0, \lambda')\mapsto(z, u, \lambda')$. 在新坐标系下,超曲面$\{P_k^{\mathbb{C}}(z, \lambda)=0\}$由方程 $u=0$ 给出. 根据引理4.3.2,存在 C^∞ 函数 $G(z, u, \lambda')$,使 G 与 g 在 $u=0$ 上各阶导数相等,并且 G 与 h 在 $\operatorname{Im} z=0$ 上各阶导数也相等(注意 $u=0$ 和 $\operatorname{Im} z=0$ 视为$\mathbb{R}^{2k+2}$的子空间,它们横截相交). 再由(ii), (iii)及(v)可知 G 即为所求.

余下证明 g 和 h 的存在性. 在新坐标系(z, u, λ')下,向量场 $\partial/\partial z+(\partial P/\partial z)\partial/\partial u$ 及 $\partial/\partial\bar{z}+(\overline{\partial P}/\partial z)\partial/\partial\bar{u}$ 分别为原坐标系(z, λ)下的 $\partial/\partial z$ 与 $\partial/\partial\bar{z}$. 令 $X=-\left(\dfrac{\overline{\partial P}}{\partial z}\right)^{-1}\partial/\partial\bar{z}$. 在坐标系$(z, x, u, \lambda')$下,$C^\infty$ 函数 h 所满足的条件可写为

(ii)′ $h(t, x, u, \lambda')=F(t, x)$, $t\in\mathbb{R}$,

(iii)′ $\partial h/\partial\bar{z}$ 与 Xh 在$\{\operatorname{Im} z=0\}$上的各阶导数相等,

(iv)′令 $M=h\mid\{u=0\}$,则 $\partial M/\partial\bar{z}$ 在$\{\partial P_k^{\mathbb{C}}/\partial z=0\}$上各阶导数为零.

现限制在超平面 $u=0$ 上,并做坐标变换 $\lambda'=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1})$

$\mapsto\left(\frac{\lambda_1}{k},\cdots,\frac{(k-1)\lambda_{k-1}}{k}\right)=\lambda''$，那么对 h 的上述条件转变为寻找 C^∞ 函数 $M(z, x, \lambda'')$满足

(1) $M(t, x, \lambda'')=F(t, x), t\in\mathbb{R}$,

(2) $\partial M/\partial\bar{z}$ 在$\{\mathrm{Im}z=0\}$上各阶导数为零，

(3) $\partial M/\partial\bar{z}$ 在$\{P_{k-1}^{\mathbb{C}}(z, \lambda'')=0\}$上各阶导数为零.

按照归纳假设，满足条件(1)～(3)的 C^∞ 函数 $M(z, x, \lambda'')$ 存在，并且可将 M 看做 z, x, λ'的 C^∞ 函数，因而$\{X^lM\}$是 C^∞ 函数列. 令

$$h(z, x, u, \lambda')=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\bar{u})^l}{l!}\rho(\mu_l\mid\bar{u}\mid^2)X^lM(z, x, \lambda'). \tag{5}$$

选取诸 μ_l，要求它们快速递增以保证由上式定义的 h(在 $0\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^k$ 的邻域内)是 C^∞ 函数，并且使得 h 满足条件(ii)′和(iii)′. 易见 h 满足条件(iv)′.

最后构造符合条件(i)和(v)的 C^∞ 函数 g. 在新坐标系(z, x, u, λ')下，它表示成寻找 C^∞ 函数 $g(z, x, u, \lambda')$，满足

(a) g 和 h 在$\{u=0\}$上的各阶导数相等，

(b) $\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}$与 Xg 在$\{u=0\}$上的各阶导数相等，

它可以看成求一类偏微分方程的初值问题的解. 不难看出，所求的解 g 与引理 4.3.3 中的形式解(4)具有相同类型，正如(5)式表示的那样.

第五章　Malgrange 预备定理

Malgrange 预备定理是非常重要的局部分析工具，曾被 R. Thom 誉为局部分析的四大支柱之一，它也是奇点理论的一个基本工具. J. Martinet[45] 指出，预备定理是除法定理的一种代数形式. 事实上，它们二者是等价的，都表达了分析中的一个深刻结果，但预备定理采用了更加代数化的语言.

本章第一节是对 Malgrange 预备定理的引入，并介绍了必须的一些代数记号和结果. 第二节从除法定理推导 Malgrange 预备定理. 为便于读者理解，将定理的证明分为几步来完成. 第三节给出了预备定理在函数芽的形变理论和映射芽的开折理论以及对称光滑函数芽的刻画方面的应用. 当然预备定理在奇点理论中的应用远不止这些，例如在第十章将看到它在映射芽的有限决定性理论中的应用.

§5.1　预备定理的陈述

在叙述 Malgrange 预备定理前，先介绍有关的代数记号与结论，以方便读者阅读.

设 A 是一个具有幺元素的交换环，M 是环 A 上的模. 若 I 为 A 中理想，那么

$$I \cdot M = \{\sum_{i=1}^{r} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M, r \text{ 为自然数}\}$$

是 M 的子模.

特别，当 $I \cdot M = (0)$（零模，只有一个元素 0 的 A-模）时，可以对于 $\bar{a} \in A/I \ (a \in A)$ 及 $m \in M$，定义运算 $\bar{a}m = am$，容易验证该

定义与 $\bar{a}$ 中代表元 a 的选取无关，由此使 M 成为环 A/I 上的模.

例 1 设 M 是 A-模，令

$$Ann(M) = \{a \in A \mid aM = (0)\},$$

则它是环 A 的理想，叫做模 M 的零化理想. 显然 $Ann(M)\cdot M = (0)$，因此 M 可看做 $A/Ann(M)$-模.

设 M 为 A-模，N 为 M 的 A-子模. 根据定义，N 是 Abel 群 M 的子群，从而有加法商群 M/N，它的元素具有形式 $x+N(x\in M)$，记为 $\bar{x}$，其加法为 $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$. 现在对于 $a\in A$，定义 $a\bar{x}=\overline{ax}$，因而 M/N 成为 A-模，叫做 M 对于子模 N 的 A-商模.

例 2 设 M 为 A-模，I 为 A 中理想，则商模 $M/I\cdot M$ 是 A-模. 又 $I\cdot {}^{M}\!/_{I\cdot M}=(0)$，故 $M/I\cdot M$ 又可看做是环 A/I 上的模. 易见 $M/I\cdot M$ 作为 A-模，它的模结构可以等同于商环 A/I 上的模结构.

特别，取环 $A=\varepsilon_n=\{(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数芽$\}$，$I=\mathcal{M}_n$（环 ε_n 的极大理想），则 $\varepsilon_n/\mathcal{M}_n\cong\mathbb{R}$. 现假定 M 是 ε_n-模，则 $M/\mathcal{M}_n\cdot M$ 是实向量空间.

设 A,B 为环，$f\colon A\to B$ 为环同态. 假定 M 为 B-模. 对于 $a\in A$，$m\in M$，定义 $am=f(a)m$，容易验证 M 由此成为 A-模. 这是改变系数环的常用手法.

例 3 设 $\phi\colon(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$ 定义为 $\phi(x,y)=(x^2,y)$. 记 ϕ 的源空间与靶空间上的 C^∞ 函数芽环分别为 ε_s 和 ε_t，则 C^∞ 芽 ϕ 诱导环同态

$$\phi^*:\varepsilon_t\to\varepsilon_s,$$

$$\lambda\mapsto\phi^*\lambda=\lambda\circ\phi.$$

借助于 ϕ^*，ε_s 可视为 ε_t-模，其纯量乘法定义为：对每一 $g\in\varepsilon_s$，$\lambda\in\varepsilon_t$，$\lambda g=(\phi^*\lambda)\cdot g$. 据 §4.1 例 3，对任意 $g\in\varepsilon_s$，存在 $s_1,s_2\in\varepsilon_t$，使得

$$g(x, y) = xs_1(x^2, y) + s_2(x^2, y),$$

或

$$g = x\phi^* s_1 + \phi^* s_2,$$

这说明 ε_s 作为 ε_t-模是有限生成的，生成元为 1 和 x.

一般来说，若 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为任意 C^∞ 映射芽，则 f 诱导环同态

$$f^*: \varepsilon_p \to \varepsilon_n, \ \lambda \mapsto \lambda \circ f = f^*\lambda.$$

假定 M 是一个 ε_n-模，借助于环同态 f^* 可赋予 M 以 ε_p-模结构，规定 $\lambda\cdot m=(f^*\lambda)\cdot m$，$\lambda\in\varepsilon_p$, $m\in M$. 易见

$$\mathscr{M}_p \cdot M = f^*\mathscr{M}_p \cdot M, \tag{1}$$

其中 $f^*\mathscr{M}_p=\langle f_1,\cdots,f_p\rangle\varepsilon_n$，它是由 f 的分量函数 $f_1,\cdots,f_p$ 生成的 ε_n 中理想. 注意等式(1)左边视为 ε_p-子模，因它用到 ε_p-模结构，而等式(1)右边为 ε_n-子模. 另外，$f^*\mathscr{M}_p$ 与 $f^*(\mathscr{M}_p)$也不同，$f^*\mathscr{M}_p$ 为 ε_n 的理想，但 $f^*(\mathscr{M}_p)$指的是 $\mathscr{M}_p$ 在 f^* 下的像，它是 ε_n 的一个子环，一般来说不是 ε_n 的理想.

例 4 设 $\pi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0)\mapsto(\mathbb{R}^n, 0)$, $(x, y)\mapsto y$ 为投射芽，则 π 诱导环同态 $\pi^*: \varepsilon_y\to\varepsilon_{x,y}$，可将 ε_y 等同于 $\varepsilon_{x,y}$ 的子环 $\pi^*\varepsilon_y$. 令 $M=\varepsilon_{x,y}$，它自然是有限生成的 $\varepsilon_{x,y}$-模，但 M 作为 ε_y-模不是有限生成的. 因为

$$M/\mathscr{M}_y \cdot M = \varepsilon_{x,y}/\pi^*\mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_{x,y} \cong \varepsilon_x,$$

并且 ε_x 作为实向量空间是无穷维的，应用推论 3.1.1 可知 M 不是有限生成的 ε_y-模.

在奇点理论中，一个重要的问题是：给定 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$，并假定 M 是一个 ε_n-模，问在什么条件下可保证 M 作为 ε_p-模是有限生成的呢？易见此时 M 必为有限生成的 ε_n-模，并且

依推论 3.1.1，$M/\mathcal{M}_p \cdot M$ 必为有限维实向量空间. Malgrange 预备定理告诉我们，上述必要条件也是充分条件.

定理 5.1.1（Malgrange 预备定理） 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，M 为有限生成的 ε_n-模，则下列条件是等价的：

(a) M 作为 ε_p-模是有限生成的，

(b) $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M$ 是有限维实向量空间.

利用推论 3.1.1，还可以更精确地叙述，即下列诸条件等价：

(a_1) 作为 ε_p-模，M 由 $m_1, \cdots, m_k$ 生成，即 $M = \varepsilon_p\{m_1, \cdots, m_k\}$，

(b_1) 实向量空间 $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M$ 由诸 m_i 的投影 $\overline{m}_i$ 生成，即 $M/f^* \mathcal{M}_p \cdot M = \mathbb{R}\{\overline{m}_1, \cdots, \overline{m}_k\}$，

并且条件(b_1)可改写为

(c_1) $\mathbb{R}\{m_1, \cdots, m_k\} + f^* \mathcal{M}_p \cdot M = M$.

§5.2 预备定理的证明

本节将预备定理的证明分为 3 步来完成，以便于读者理解. 我们将由除法定理来推导 Malgrange 预备定理，但本质上说，这两个定理是等价的. 首先考察一个特殊情形.

命题 5.2.1 设 $\pi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto y = (y_1, \cdots, y_n)$ 为标准投影芽，记$\langle P \rangle_{\varepsilon_{x,y}}$为由 $P \in \varepsilon_{x,y}$生成的$\varepsilon_{x,y}$中理想. 令 $M = \varepsilon_{x,y}/\langle P \rangle_{\varepsilon_{x,y}}$，则下列条件等价：

(i) M 是有限生成的ε_y-模，

(ii) $M/\mathcal{M}_y \cdot M$ 为有限维实向量空间，

(iii) 函数芽 P 关于 x 是有限阶正则的.

证 M 是有限生成的$\varepsilon_{x,y}$-模，因为有限生成模的商模是有限生成的.

(i)⇒(ii) 据推论 3.1.1.

(ii)⇒(iii) 因

$$\mathscr{M}_y \cdot M \cong (\mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_{x,y} + \langle P\rangle_{\varepsilon_{x,y}})/\langle P\rangle_{\varepsilon_{x,y}},$$

$$M/\mathscr{M}_y \cdot M \cong \varepsilon_{x,y}/\langle P, y_1, \cdots, y_n\rangle_{\varepsilon_{x,y}} \cong \varepsilon_x/\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x},$$

由(ii),$\dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x/\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x} < +\infty$,这说明理想$\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x}$在$\varepsilon_x$中具有有限余维. 据推论 1.1.2,存在正整数 r,使得

$$\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x} \supset \mathscr{M}_x^r.$$

记使上述包含关系成立的最小整数为 k,即$\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x} \supset \mathscr{M}_x^k$,但$\langle P(x, 0)\rangle_{\varepsilon_x} \not\supset \mathscr{M}_x^{k-1}$,由此立即可推得

$$P(x, 0) = x^k p(x),$$

其中 $p \in \varepsilon_x$ 且 $p(0) \neq 0$,于是 P 关于 x 是 k 阶正则的.

(iii)⇒(i) 假定 $P \in \varepsilon_{x,y}$ 关于 x 是 k 阶正则的. 设 $\bar{f} \in M$,其代表为 $f \in \varepsilon_{x,y}$. 用 P 除 f,根据除法定理,有

$$f(x, y) = P(x, y)Q(x, y) + \sum_{j=0}^{k-1} r_j(y)x^j,$$

投影到 M 中,因 $P \cdot Q \in \langle P\rangle_{\varepsilon_{x,y}}$,故

$$\bar{f} = \sum_{j=0}^{k-1} r_j \cdot \overline{x^j}, \quad r_j \in \varepsilon_y,$$

这说明$\overline{x^j} \in M(j = 0, \cdots, k-1)$是 ε_y-模 M 的一组生成元.

注 我们利用除法定理证明了预备定理的一种特殊情形. 值得指出的是,这一特殊情形实际上可推出除法定理. 留作读者练习.

命题 5.2.2 设 $\pi: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto y$ 为投影芽,M 为有限生成的 $\varepsilon_{x,y}$-模,则下列条件等价:

(i) 借助于 π^*, M 作为 ε_y-模是有限生成的,

(ii) $M/\mathscr{M}_y\cdot M=M/\pi^*\mathscr{M}_y\cdot M$ 是有限维实向量空间.

证 只需证(ii)⇒(i). 选取 $\varepsilon_{x,y}$-模 M 的一组生成元 $\{m_1,\cdots,m_k\}$,使得诸 m_i 在 $M/\mathscr{M}_y\cdot M$ 中的投影 $\overline{m}_i$ 生成这一实向量空间,即

$$M/\mathscr{M}_y\cdot M=\mathbb{R}\{\overline{m}_1,\cdots,\overline{m}_k\}.$$

显然该式等价于

$$M=\mathbb{R}\{m_1,\cdots,m_k\}+\pi^*\mathscr{M}_y\cdot M,$$

因而每一 $xm_i\in M(x\in\varepsilon_{x,y}$ 为坐标函数芽)可写为

$$xm_i=\sum_{j=1}^{k}c_i^jm_j+\sum_{j=1}^{k}\lambda_i^jm_j,\quad i=1,\cdots,k,\tag{1}$$

其中 $c_i^j\in\mathbb{R}$, $\lambda_i^j\in\pi^*\mathscr{M}_y$(即 $\lambda_i^j(x,0)=0$ 对每一 $x\in(\mathbb{R},0)$). 方程组(1)可用矩阵形式表示成

$$T(m_1,\cdots,m_k)^t=0,\tag{2}$$

其中 $T=(\delta_i^jx-c_i^j-\lambda_i^j)$为 $k\times k$ 矩阵且每一 $\delta_i^jx-c_i^j-\lambda_i^j\in\varepsilon_{x,y}$, 这里 δ_i^j 为 Kronecker 符号. 用 T 的伴随矩阵左乘方程(2)的两边可导出

$$\det T\cdot m_i=0,\quad i=1,\cdots,k.\tag{3}$$

令 $P(x,y)=\det T$. 因 $T(x,0)=(\delta_i^jx-c_i^j)$,故 $P(x,0)=\det T(x,0)$是 x 的实系数k 次多项式,并且最高项系数为 1,因此 $P(x,y)$关于 x 是$r(\leqslant k)$阶正则的.

任取 $m\in M$,则

$$m=\sum_{i=1}^{k}\alpha_im_i,\quad\alpha_i\in\varepsilon_{x,y}.$$

应用除法定理,

$$\alpha_i=P\cdot Q_i+\sum_{j=0}^{r-1}h_{ij}x^j,$$

其中 $h_{ij}\in\varepsilon_y(i=1,\cdots,k,\ j=0,\cdots,r-1)$，于是

$$m=\sum_{i=1}^{k}(P\cdot Q_i)m_i+\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=0}^{r-1}h_{ij}x^j\Big)m_i,$$

并且依(3)式，上式化简为

$$m=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{r-1}h_{ij}x^jm_i,$$

这说明 M 作为 ε_y-模由

$$m_{ij}=x^jm_i,\ i=1,\cdots,k,\ j=0,\cdots,r-1$$

生成．证毕．

命题 5.2.1 是命题 5.2.2 的特殊情形．现在再将命题 5.2.2 推广，得

命题 5.2.3 设 $\pi:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^n,(x,y)\mapsto y$ 为投影芽，这里 $x=(x_1,\cdots,x_p)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$．假定 M 为有限生成的 $\varepsilon_{x,y}$- 模，那么下列条件等价：

(i) M 作为 ε_y-模是有限生成的，

(ii) 实向量空间 $M/\pi^*\mathscr{M}_y\cdot M$ 是有限维的．

证 只需证(ii)⇒(i)，我们对维数 p 使用归纳法．当 $p=1$ 时，这就是命题 5.2.2．假定在维数为 $p-1$ 时结论成立．考虑投影

$$(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\xrightarrow{\pi_1}(\mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}^n,0)\xrightarrow{\pi_2}\mathbb{R}^n,$$

$$(x_1,\cdots,x_p,y)\mapsto(x_2,\cdots,x_p,y)\mapsto y,$$

记 $x'=(x_2,\cdots,x_p)$．显然 $\pi=\pi_2\circ\pi_1$，$\pi^*=\pi_1^*\circ\pi_2^*$，这里

$$\varepsilon_y\xrightarrow{\pi_2^*}\varepsilon_{x',y}\xrightarrow{\pi_1^*}\varepsilon_{x,y}.$$

$\varepsilon_{x,y}$-模 M 借助于 π_1^* 看做 $\varepsilon_{x',y}$-模，再借助于 π_2^* 视为 ε_y-模，并且将 $\mathscr{M}_y$ 等同于 $\pi_2^*\mathscr{M}_y\subset\mathscr{M}_{x',y}$．现在由条件(ii)可推出 $M/\mathscr{M}_{x',y}\cdot M$

为有限维实向量空间. 应用命题 5.2.2 于 π_1，说明 M 作为 $\varepsilon_{x',y}$-模是有限生成的. 然后应用归纳假设于 π_2，M 应为有限生成的 ε_y-模.

定理 5.1.1 的证明 只要证(b)⇒(a). 运用对 graph$f$(f 的图)所使用的技巧，将 f 分解为一个单射 i 接上一个投射 π 的复合：

$$(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{i} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^p, 0),$$

$$x \mapsto (x, f(x)) \mapsto f(x).$$

因 i 是浸入芽，故 $i^*: \varepsilon_{x,y} \to \varepsilon_x$ 为满同态. 今假定 M 是有限生成的 ε_x-模，借助于 i^*，M 作为 $\varepsilon_{x,y}$-模必然是有限生成的. 注意到

$$M/f^*\mathscr{M}_y \cdot M = M/\pi^*\mathscr{M}_y \cdot M,$$

由定理条件(b)及命题 5.2.3 可推出 M 是有限生成的 ε_y-模.

例 1 设 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ 定义为 $f(x_1, x_2) = (y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2)$，则

$$f^*\mathscr{M}_y = \langle x_1^2, x_2^2 \rangle \subset \varepsilon_x.$$

容易验证 $\mathscr{M}_x^3 \subset f^*\mathscr{M}_y$，并且

$$f^*\mathscr{M}_y + \mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1x_2\} = \varepsilon_x.$$

令 $M = \varepsilon_x$，则 M 是有限生成的 ε_x-模，上式相当于定理 5.1.1 中条件(c_1)，因此 M 作为 ε_y-模是有限生成的，以 $1, x_1, x_2, x_1x_2$ 为生成元. 于是对任意 $g \in \varepsilon_x$，g 可表为

$$g = f^*\alpha + f^*\beta \cdot x_1 + f^*\gamma \cdot x_2 + f^*\delta \cdot x_1x_2,$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \varepsilon_y$，或

$$g(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2, x_2^2) + \beta(x_1^2, x_2^2)x_1 + \gamma(x_1^2, x_2^2)x_2 + \delta(x_1^2, x_2^2)x_1x_2.$$

例 2 设 $f:(\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}^2, 0)$定义为 $f(x_1, x_2)=(y_1=x_1^2-x_2^2, y_2=2x_1x_2)$,此时

$$f^*\mathcal{M}_y = \langle x_1^2 - x_2^2, x_1x_2\rangle \subset \varepsilon_x.$$

容易验证

$$f^*\mathcal{M}_y + \mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2\} = \varepsilon_x,$$

由定理 5.1.1,ε_x 作为环ε_y 上的模是有限生成的,以 $1, x_1, x_2, x_1^2+x_2^2$ 为一组生成元.

§5.3 应　用

5.3.1 应用于函数芽的形变理论

记$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 中的点为(t, x). 设 i: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n, 0)$, $i(x)=(0, x)$为包含映射芽,则 i 诱导环同态i^*: $\varepsilon_{t,x}\to\varepsilon_x$, $\lambda\mapsto i^*\lambda=\lambda\circ i$,它是满同态. 简记 $i^*\lambda=\lambda_0$,则 $\lambda_0(x)=\lambda(0, x)$,即 $\lambda_0=\lambda|_{t=0}$,因此 i^*是限制同态. 若 I 为$\varepsilon_{t,x}$中理想,将 I 中的成员在$t=0$上的限制所成之集记为 I_0,易见 I_0 为 ε_x 中理想.

定理 5.3.1 设 I 为$\varepsilon_{t,x}$中理想,$\lambda_1,\cdots,\lambda_r\in\varepsilon_{t,x}$,则下列条件等价:

(i) $I_0+\mathbb{R}\{\lambda_{1,0},\cdots,\lambda_{r,0}\}=\varepsilon_x$, 其中 $\lambda_{i,0}=(\lambda_i)_0$,

(ii) $I+\mathcal{M}_t\cdot\varepsilon_{t,x}+\mathbb{R}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}=\varepsilon_{t,x}$,

(iii) $I+\varepsilon_t\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}=\varepsilon_{t,x}$.

证 令 $M=\varepsilon_{t,x}/I$,则 M 是有限生成的$\varepsilon_{t,x}$-模. 记 π: $(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}^p$ 为标准投影. 借助于 π^*,M 可看做ε_t-模. 因

$$M/\pi^*\mathcal{M}_t\cdot M = M/\mathcal{M}_t\cdot M \cong \varepsilon_{t,x}/(I+\mathcal{M}_t\cdot\varepsilon_{t,x}) \cong \varepsilon_x/I_0,$$

故条件(i)和(ii)均等价于(a)实向量空间 $M/\mathcal{M}_t\cdot M$ 由诸λ_i($i=1,\cdots,r$)在该空间中的投影所生成. 而条件(iii)等价于(b)M 作为

ε_t-模是有限生成的,生成元为诸 $\lambda_i(i=1,\cdots,r)$在 M 中的投影.据定理 5.1.1(或由命题 5.2.3 及推论 3.1.1),(a)与(b)等价.

注 本定理结果在讨论具有有限余维的实值函数芽的通用形变时发挥作用.

例 1 记$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 中的点为(t, x). 设 $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$满足 $f(0, x)=x^p$,即 $f_0(x)=x^p$,这里 $p>1$ 为自然数,f 叫做 f_0 的 n-参数形变(见定义 6.1.1). 设 I 为 $\varepsilon_{t,x}$ 中理想,由$\dfrac{\partial f}{\partial x}$生成,则 $I_0(\subset\varepsilon_x)$由$(\dfrac{\partial f}{\partial x})_0=px^{p-1}$生成,并且

$$I_0+\mathbb{R}\{1, x,\cdots,x^{p-2}\}=\varepsilon_x.$$

由定理 5.3.1 知,

$$I+\varepsilon_t\{1, x,\cdots,x^{p-2}\}=\varepsilon_{t,x}.$$

例 2 记$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$ 中的点为(t, x),其中 $x=(x_1, x_2)$. 设 $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$满足 $f(0, x_1, x_2)=f_0(x_1, x_2)=x_1^3-x_1x_2^2$, f 叫做f_0 的 n-参数形变. 令

$$I=\langle\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\rangle\varepsilon_{t,x},$$

请读者验证

$$I_0+\mathbb{R}\{1, x_1, x_2, x_1^2\}=\varepsilon_x,$$

于是有

$$I+\varepsilon_t\{1, x_1, x_2, x_1^2\}=\varepsilon_{t,x}.$$

5.3.2 在映射芽的开折理论中的应用

记$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 中的点为(t, x),其中 $t=(t_1,\cdots, t_p)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$. 假定 M 是有限生成的 $\varepsilon_{t,x}$-模,则商模 $M_0=M/\mathcal{M}_t\varepsilon_{t,x}\cdot M$是一个$\varepsilon_x$-模(因 $\varepsilon_{t,x}/\mathcal{M}_t\cdot\varepsilon_{t,x}=\varepsilon_x$),称为由 M 中的

成员在$t=0$上的限制所成之模.

定理 5.3.2 设 M 是有限生成的$\varepsilon_{t,x}$-模,N 为M 的子模,又 $m_1,\cdots,m_k\in M$,则下列条件等价:

(i) $N+\varepsilon_t\{m_1,\cdots,m_k\}=M$,

(ii) $N_0+\mathbb{R}\{m_{1,0},\cdots,m_{k,0}\}=M_0$,其中 N_0 是 N 在M_0 中的投影,$m_{i,0}$为 m_i 在M_0 中投影.

证明提示:与定理 5.3.1 的证法相同.

下面介绍预备定理的一个重要应用,它在映射芽的开折理论研究中常常用到.

设 $f_0:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^t,0)$为 C^∞ 芽. 如果 $F:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^t,0)$, $(u,x)\mapsto(u,f(u,x))$ 使得 $f(0,x)=f_0(x)$, 那么 F 叫做f_0 的 p-参数开折(见定义 8.1.1). 令 $i_s:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^s,0)$, $x\mapsto(0,x)$ 和 $i_t:(\mathbb{R}^t,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^t,0)$, $y\mapsto(0,y)$ 为包含映射芽,则

$$F\circ i_s=i_t\circ f_0,\quad i_s^*\circ F^*=f_0^*\circ i_t^*.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^s,0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^t,0) & \qquad & \varepsilon_{u,x} & \xleftarrow{F^*} & \varepsilon_{u,y}\\
\uparrow i_s & & \uparrow i_t & & \downarrow i_s^* & & \downarrow i_t^*\\
(\mathbb{R}^s,0) & \xrightarrow{f_0} & (\mathbb{R}^t,0) & & \varepsilon_x & \xleftarrow{f_0^*} & \varepsilon_y
\end{array}$$

此外,$\operatorname{Ker}i_s^*=\mathscr{M}_u\cdot\varepsilon_{u,x}$,$\operatorname{Ker}i_t^*=\mathscr{M}_u\cdot\varepsilon_{u,y}$.

假设 M 是有限生成的 $\varepsilon_{u,x}$-模. 令 $M_0=M/\mathscr{M}_u\varepsilon_{u,x}\cdot M$,则 M_0 是环 $\varepsilon_{u,x}/\mathscr{M}_u\cdot\varepsilon_{u,x}=\varepsilon_x$ 上的模(由 M 中的成员在 $u=0$ 上的限制所成之模). 借助于 F^*,M 可看做$\varepsilon_{u,y}$-模. 而借助于 f_0^*, M_0 可视为 ε_y-模.

定理 5.3.3 M,M_0 如上所述,则下列条件是等价的:

(i) M 是有限生成的$\varepsilon_{u,y}$-模,

(ii) M_0 是有限生成的 ε_y-模.

更确切地, M 作为 $\varepsilon_{u,y}$-模由 $m_1, \cdots, m_k$ 生成, 即 $M = \varepsilon_{u,y}\{m_1, \cdots, m_k\} \Leftrightarrow M_0 = \varepsilon_y\{m_{1,0}, \cdots, m_{k,0}\}$, 即 M_0 作为 ε_y-模由诸 m_i 在 M_0 中的投影 $m_{i,0}$ 生成($i = 1, \cdots, k$).

证明概要 $\varepsilon_{u,x}$ 中的理想 $F^* \mathscr{M}_{u,y}$ 由 $u_1, \cdots, u_p$ 及 f 的分量 $f_1, \cdots, f_t$ 所生成. 容易验证

$$
\begin{aligned}
M/F^* \mathscr{M}_{u,y} \cdot M &\cong M_0/\langle f_1(0, x), \cdots, f_t(0, x)\rangle_{\varepsilon_x} \cdot M_0 \\
&= M_0/f_0^* \mathscr{M}_y \cdot M_0,
\end{aligned}
$$

然后利用 Malgrange 预备定理.

5.3.3 用于对称函数芽的刻画

在高等代数中,有一个关于对称多项式的基本定理,即:每一个对称多项式都可以惟一地表为初等对称多项式的多项式. 说得详细些,将不定元 $x_1, \cdots, x_n$ 的下列多项式:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2(x_1, \cdots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_{n-1}(x_1, \cdots, x_n) &= x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n \\
&\quad + \cdots + x_2x_3\cdots x_n, \\
\sigma_n(x_1, \cdots, x_n) &= x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

统称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的初等对称多项式,其中 σ_k 是从 $x_1, \cdots, x_n$ 中取 k 个的一切可能乘积的和. 那么该定理说,域 $\mathbb{F}$ 上的每一个对称多项式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 可以惟一地表成初等对称多项式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的系数在 $\mathbb{F}$ 中的多项式,即

$$
P(x_1, \cdots, x_n) = Q(\sigma_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \sigma_n(x_1, \cdots, x_n)),
$$

其中 Q 为$\mathbb{F}$上 n 个不定元的多项式. 本段试图将该结果从对称多项式推广到对称的 C^∞ 函数芽,为此需要用到 Malgrange 预备定理.

记$\mathbb{R}^n$ 中点 x 的坐标为 $x_1,\cdots,x_n$. 将由(1)式定义的函数 σ_i $(i=1,\cdots,n)$在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的芽仍记为 $\sigma_i:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$. 此外,用 S_n 表示$\{1,\cdots,n\}$的置换群.

定义 5.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数芽. 如果对任意 $\pi\in S_n$,有

$$f(x_1,\cdots,x_n) = f(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(n)}),$$

则称 f 为对称的 C^∞ 函数芽.

显然,诸 $\sigma_i:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 均为对称的光滑函数芽. 令 $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$定义为

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x),\cdots,\sigma_n(x)),$$

并记 σ 的源空间与靶空间点的坐标分别为 $x=(x_1,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,\cdots,y_n)$.

引理 5.3.1 ε_x 作为环 $\sigma^*\varepsilon_y$ 上的模是有限生成的,并且由坐标函数芽 $x_1,\cdots,x_n(\in\varepsilon_x)$的次数小于 n^n 的所有单项式构成它的一组生成元.

证 因

$$\prod_{i=1}^{n}(t-x_i) = t^n - \sigma_1(x)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n(x),$$

令 $t=x_i$,则

$$0 = x_i^n - \sigma_1(x)x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n(x),$$

因此

$$x_i^n = \sigma_1(x)x_i^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_n(x),$$

这说明 $x_i^n\in\sigma^*\mathscr{M}_y\cdot\varepsilon_x(i=1,\cdots,n)$,从而

$$\mathcal{M}_x^k \subset \sigma^* \mathcal{M}_y \cdot \varepsilon_x, \quad k \geqslant n^n,$$

于是有

$$\dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x / \sigma^* \mathcal{M}_y \cdot \varepsilon_x \leqslant \dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x / \mathcal{M}_x^k < +\infty,$$

并且次数小于 n^n 的所有单项式生成实向量空间 $\varepsilon_x / \mathcal{M}_x^k$. 由 Malgrange 预备定理知本引理成立.

G. Glaeser[24] 曾经证明对称的光滑函数芽可表示为初等对称函数的光滑函数芽,这就是下面的

定理 5.3.4 $f \in \varepsilon_n$ 是对称的当且仅当存在 $g \in \varepsilon_n$,使得 $f = \sigma^* g$.

证 充分性显然,下证必要性.

记 $\{\phi_1(x), \cdots, \phi_r(x)\}$ 为由 $x_1, \cdots, x_n$ 的次数小于 n^n 的单项式组成的集. 设 $f \in \varepsilon_x$ 是对称芽,据引理 5.3.1,存在 $g_i \in \varepsilon_y (i = 1, \cdots, r)$,使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} (\sigma^* g_i)(x) \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{r} g_i(\sigma(x)) \phi_i(x).$$

注意到 f 和 σ_i 都是对称的,又置换群 S_n 含有 $n!$ 个元素,故由上式得

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{\pi \in S_n} \phi_i(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)}) \Big) g_i(\sigma(x)). \qquad (2)$$

而多项式

$$p_i(x) = \sum_{\pi \in S_n} \phi_i(x_{\pi(1)}, \cdots, x_{\pi(n)})$$

显然是对称的. 由对称多项式的基本定理,对每个 $i = 1, \cdots, r$,存在惟一的多项式 Q_i,使得

$$p_i(x) = Q_i(\sigma(x)),$$

代入(2)式,得

$$f(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{r}Q_i(\sigma(x))g_i(\sigma(x)).$$

令 $g(y)=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{r}Q_i(y)g_i(y)$,则 $g\in\varepsilon_y$ 且 $f=g\circ\sigma$.

第六章　实值函数芽的形变

第三章介绍了光滑函数芽的单参数形变，初步了解到它在描述可微函数奇点方面所起的作用. 本章不只限于单参数形变，对函数芽多参数形变的探讨，给出了奇点理论中一个重要结果，即通用形变定理. 该定理告诉我们，一个函数芽具有通用形变，可用该函数芽具有有限余维来刻画，因此又与函数芽的有限决定性密切相关. 此外，通用形变还可用横截性来描述. 由此可见，形变概念在奇点理论研究中是重要的. 本章还将简短地介绍它在突变理论中的应用.

§6.1　基本概念

定义 6.1.1　设 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数芽. 若 C^∞ 函数芽 F: $(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 在 $\{0\}\times\mathbb{R}^n$ 上的限制为 f，则 F 叫做 f 的 p-参数形变.

记 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 的点为 (t, x)，其中 $t=(t_1,\cdots,t_p)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$，那么 $F|\{0\}\times\mathbb{R}^n=f$ 意指 $F(0, x)=f(x)$.

对于芽 $f\in\varepsilon_n$ 的两个 p-参数形变，有可能在源空间 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 上施行局部坐标变换，将其中的一个形变变为另一个，并且要求上述坐标变换保持参数 $t\in\mathbb{R}^p$ 不变，因此引入下列

定义 6.1.2　设 ϕ: $(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n, 0)$ 为微分同胚芽，满足下列条件：

$$\phi(t, x)=(t, \psi(t, x)),\quad \phi(0, x)=(0, x),\qquad (1)$$

则 ϕ 叫做 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 上的恒同映射芽的 p-参数开折.

显然 $\pi\circ\phi=\pi$，其中 π: $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为标准投影. 这说明 ϕ

将"纤维"$\{t\}\times\mathbb{R}^n$ 映为自身，因而是保纤维的. 而 $\phi(0, x)=(0, x)$说明 ϕ 在纤维$\{0\}\times\mathbb{R}^n$ 上的限制是一个恒同映射芽.

满足条件(1)的微分同胚芽 $\phi(\in L_{p+n})$的全体组成 L_{p+n} 的一个子群，记为 $L_{n,p}$.

定义 6.1.3 设 $f\in\varepsilon_n$.

(i) f 的两个 p-参数形变 F 和 G 是同构的，如果存在 $\phi\in L_{n,p}$，使得 $F=G\circ\phi$.

(ii) f 的形变 F 叫做平凡的，若它同构于常值形变 $(t, x)\mapsto f(x)$.

对于 $f\in\varepsilon_n$ 的任意两个形变，其参数空间可能不一样. 为便于研究不同形变之间的相互联系，有必要对参数空间实施变换，使具有不同参数的形变具有相同参数.

定义 6.1.4 设 F 是 $f\in\varepsilon_n$ 的 p-参数形变. 假定

$$h:(\mathbb{R}^q, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0),\ s\mapsto h(s)=t$$

是一个 C^∞ 映射芽，定义 h^*F: $(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 为

$$h^*F(s, x)=F(h(s), x),$$

它叫做由 h 诱导的 F 的拉回. 显然，h^*F 是 f 的 q-参数形变，可表为

$$h^*F=F\circ(h\times 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}),$$

其中 $1_{(\mathbb{R}^n, 0)}$表示$(\mathbb{R}^n, 0)$上的恒同映射芽.

设 $f\in\varepsilon_n$ 的 p-参数形变 F 含有 p 个参数 $t_1,\cdots,t_p$，令

$$\dot{F}_i(x)=\frac{\partial F}{\partial t_i}(0, x),\quad i=1,\cdots,p,$$

则 $\dot{F}_i\in\varepsilon_n$ 叫做 F 关于参数 t_i 的初始速度.

若 $G=h^*F$，其中 $h:(\mathbb{R}^q, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞ 映射芽，则依链法则，有

$$\dot{G}_i = \sum_{j=1}^{p} \dot{F}_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial s_j}(0), \quad i = 1,\cdots,q,$$

这说明 G 的初始速度属于由诸 $\dot{F}_j$(F 的初始速度)生成的实向量空间,即

$$\dot{G}_i \in \mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}, \quad i = 1,\cdots,q.$$

更一般地,有下列

命题 6.1.1 若 F,G 分别为 $f\in \varepsilon_n$ 的 p 参数与 q 参数形变,且 G 同构于 h^*F,其中 $h:(\mathbb{R}^q,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 芽,则 $\dot{G}_i$ 在商空间 $\varepsilon_n/J(f)$ 中的投影属于由诸 $\dot{F}_j$ 在 $\varepsilon_n/J(f)$ 中的投影生成的实向量空间,这里 $J(f)$ 表 f 的 Jacobi 理想.

证 G 同构于 h^*F,则存在 $\phi\in L_{n,q}$,使得

$$G = h^*F\circ\phi.$$

设 $\phi(s,x)=(s,\psi(s,x))$ 且 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n)$,则

$$G(s,x) = F(h(s),\psi(h(s),x)).$$

$$\dot{G}_i(x)= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial t_j}(0,x)\cdot\frac{\partial h_j}{\partial s_i}(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}(0,x)\cdot\frac{\partial \psi_k}{\partial s_i}(0,x)$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\dot{F}_j(x)\cdot\frac{\partial h_j}{\partial s_i}(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\cdot\frac{\partial \psi_k}{\partial s_i}(0,x),$$

因此

$$\dot{G}_i \in J(f) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}, \quad i = 1,\cdots,q.$$

定义 6.1.5 设 $f\in\varepsilon_n$. f 的两个 p-参数形变 F 和 G 叫做等价的,如果存在微分同胚芽 $h:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得 G 同构于 h^*F.

形变的等价是一个等价关系,并且它比形变的同构概念稍为广泛些.

定义 6.1.6 设 $f\in\varepsilon_n$. f 的形变 F 叫做通用形变,如果 f 的任何其他形变 G 同构于 F 的某一拉回,该拉回由参数空间之间的某一适当的 C^∞ 映射所诱导.

函数芽 f 的形变有无限多个. 如果 f 有通用形变,那么 f 的每一个形变都可以由它的通用形变按照某一适当的方式产生出来. 因此寻求一个函数芽具有通用形变的条件是一件很有意义的工作. 首先我们从定义得到下面一些简单事实.

命题 6.1.2 若 $f\in\varepsilon_n$ 容有 p-参数通用形变 F,则 f 的余维数有限,并且 $\varepsilon_n/J(f)$ 作为实向量空间由 F 的初始速度 $\dot{F}_i$ ($i=1,\cdots,p$)生成,

$$J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}=\varepsilon_n. \tag{2}$$

证 任取 $g\in\varepsilon_n$. 考虑 f 的 1-参数形变 G, $G(s,x)=f(x)+sg(x)$. 因为 F 是通用形变,因此 G 同构于 h^*F,其中 $h:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽. 根据命题 6.1.1,

$$g=\dot{G}\in J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}.$$

由于 $g\in\varepsilon_n$ 是任取的,因此(2)式成立.

命题 6.1.3 设 F 和 G 同为 $f\in\varepsilon_n$ 的 p-参数通用形变,且 $p=\mathrm{Codim}f$,则 F 和 G 是等价的.

证 因 F 是通用形变,故存在 $h:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$, $v\mapsto h(v)=u$,使得 G 同构于 $h^*F=H$. 如果能证明 h 是可逆芽,那么 F 与 G 等价.

据假设,形变 G 是通用的,故 H 也必为通用的. 此外,

$$\dot{H}_i=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0)\cdot\dot{F}_j,\quad i=1,\cdots,p.$$

由于 $\mathrm{Codim}f=p$,根据命题 6.1.2, $\{\dot{H}_1,\cdots,\dot{H}_p\}$ 及 $\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}$ 均为实线性无关组,从而矩阵 $\mathrm{D}h(0)=\left(\frac{\partial h_j}{\partial v_i}(0)\right)$ 是可逆的, h 为

微分同胚芽.

命题 6.1.4 设 F 为 $f \in \varepsilon_n$ 的 p-参数通用形变,其中 $p = \mathrm{Codim} f$. 又假定 G 是 f 的 q-参数通用形变,$q > p$. 那么存在一个淹没芽 $h:(\mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$,使得 G 同构于 $h^* F$. 于是 G 等价于 F 的一个常值形变.

证明提示 与命题 6.1.3 的证法相同. 留给读者练习.

命题 6.1.2 告诉我们:若 f 容有 p-参数通用形变,则 f 是一个具有有限余维的函数芽,并且关系式(2)成立. 令人高兴的是其逆亦真,这就是通用形变定理. 为证明它,下一节介绍两个引理以做准备.

§6.2 两个引理

6.2.1 几何引理

设 F 为 $f \in \varepsilon_n$ 的 p-参数形变,$t = (t_1, \cdots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ 为参数. 将 F 在子空间 $t_1 = 0$ 上的限制记为 F_1,即 $F_1:(\mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ 作为 f 的 $(p-1)$-参数形变,定义为

$$F_1(t_2, \cdots, t_p, x) = F(0, t_2, \cdots, t_p, x),$$

显然 F 是 F_1 的 1-参数形变. f 的两个形变 F 和 F_1 之间的关系由下列引理给出.

引理 6.2.1 设 F 为 $f \in \varepsilon_n$ 的 p-参数形变. 假设在 $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n, 0)$ 上存在 C^∞ 向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=2}^{p} \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n} X_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

使得

$$X \cdot F = 0, \qquad (2)$$

则存在淹没芽 $h:(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$,使得 F 同构于 $h^* F_1$.

证 令向量场

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=2}^{p} \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial t_i},$$

它定义在 $0 \in \mathbb{R}^p$ 的一邻域上,可看做是 $\mathbb{R}$ 上的向量场 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ 的"提升". 通过积分向量场 ξ 可得到一局部微分同胚

$$\psi:(t_1,\cdots,t_p) \mapsto (t_1, \psi_{t_1}(t_2,\cdots,t_p)),$$

$\psi \in L_{p-1,1}$. 令 $h:(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ 定义为

$$h(t_1,\cdots,t_p) = \psi_{t_1}^{-1}(t_2,\cdots,t_p),$$

易见 h 是一个淹没芽,且

$$\begin{aligned} h^* F_1(t_1,\cdots,t_p, x) &= F_1(h(t_1,\cdots,t_p), x) \\ &= F_1(\psi_{t_1}^{-1}(t_2,\cdots,t_p), x) \\ &= F(0, \psi_{t_1}^{-1}(t_2,\cdots,t_p), x). \end{aligned}$$

向量场 X 是向量场 $\frac{\partial}{\partial t_1}$ 的提升,由条件(1)和(2),根据命题3.2.1, F 作为 F_1 的 1-参数形变是平凡的. 又因为向量场 X 是向量场 ξ 的提升,积分向量场 X 得到的局部微分同胚具有下列形式:

$$\phi:(t_1,\cdots,t_p, x) \mapsto (t_1, \psi_{t_1}(t_2,\cdots,t_p), \chi(t,x)),$$

$\phi \in L_{p+n-1,1}$. 条件(2)是指 F 沿 X 的积分曲线为常值,因而

$$F_1 = F|_{t_1=0} = F_{t_1} \circ \phi_{t_1}, \quad \forall t_1 \in (\mathbb{R}, 0),$$

即

$$F(t_1, \psi_{t_1}(t_2,\cdots,t_p), \chi(t, x)) = F(0, t_2,\cdots,t_p, x).$$

定义 $\Phi:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)$为 $\Phi(t,x)=(t,\chi_t^{-1}(x))$. 易见 $\Phi\in L_{n,p}$,并且 $h^*F_1\circ\Phi=F$,即 F 同构于 h^*F_1.

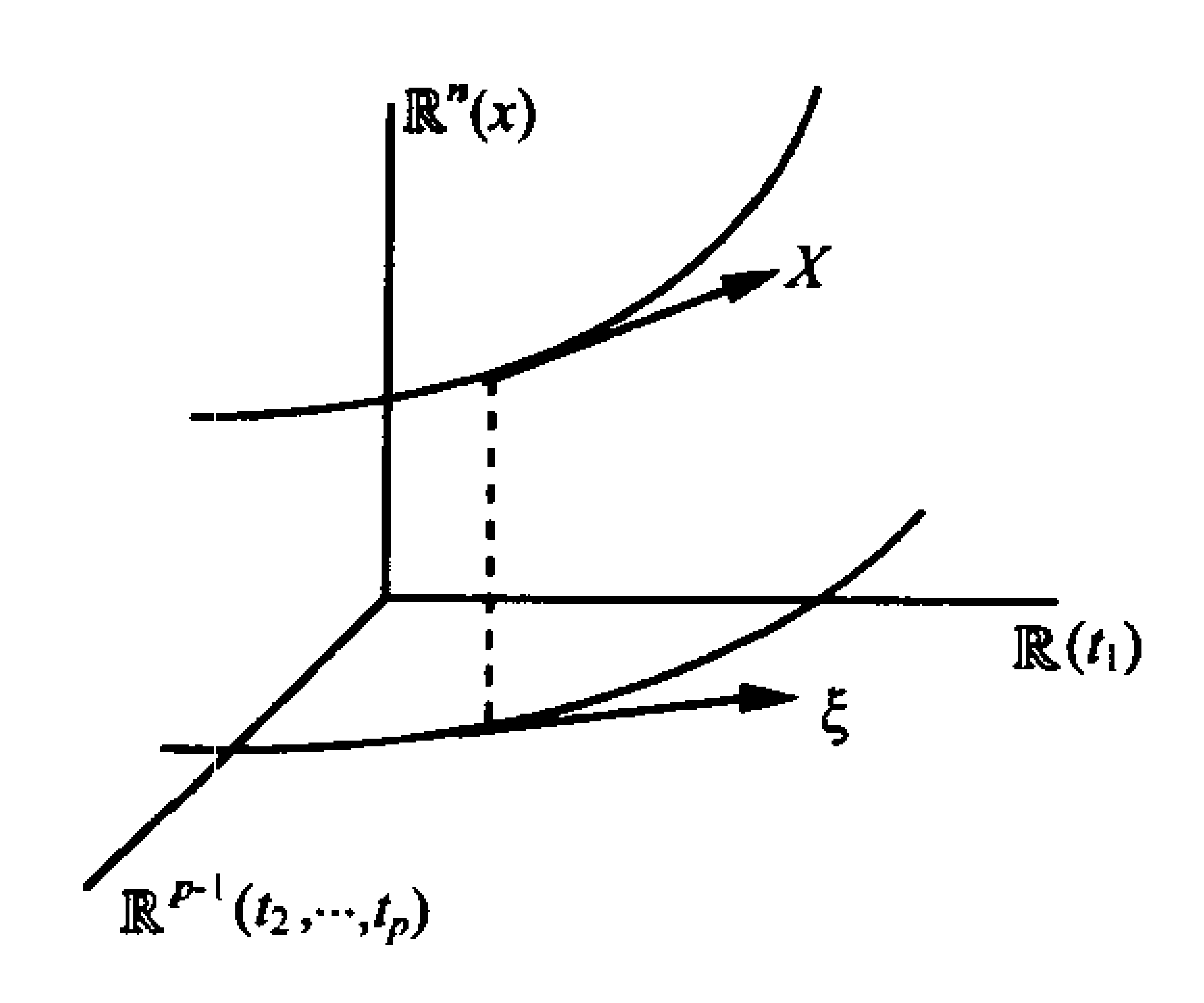


图 6.1

注 本引理的逆命题亦真,留作读者练习.

6.2.2 代数引理

记$\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 中的点为(t,x),其中 $t=(t_1,\cdots,t_p)$,$x=(x_1,\cdots,x_n)$. 设 $F\in\varepsilon_{t,x}$为$f\in\varepsilon_x$ 的 p-参数形变,这里 ε_x 表示变量x 的n 元函数芽环,$\varepsilon_{t,x}$为变量 t 与 x 的$(p+n)$元函数芽环. 记$J(f)$为 f 的 Jacobi 理想. 形式上定义 $\varepsilon_{t,x}$中理想 $J(F)=\langle\frac{\partial F}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\rangle\varepsilon_{t,x}$.

引理 6.2.2 设 $F\in\varepsilon_{t,x}$为$f\in\varepsilon_x$ 的 p-参数形变,$J(f)$与$J(F)$如上所述,则下列条件是等价的:

(a) $J(f)+\mathbb{R}\{\lambda_{1,0},\cdots,\lambda_{r,0}\}=\varepsilon_x$,

(b) $J(F)+\varepsilon_t\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}=\varepsilon_{t,x}$,

其中 $\lambda_i\in\varepsilon_{t,x}$,$\lambda_{i,0}\in\varepsilon_x$ 是λ_i 在子空间$t=0$ 上的限制,即 $\lambda_{i,0}(x)=\lambda_i(0,x)(i=1,\cdots,r)$.

证 由定理 5.3.1 直接得到,只要令 $I=J(F)$. 易见 $I_0=J(f)$.

§6.3 通用形变定理

定理 6.3.1 设 F 是 $f\in\varepsilon_n$ 的 p-参数形变，则 F 是 f 的通用形变当且仅当 F 的初始速度 $\dot{F}_i(i=1,\cdots,p)$ 满足下列关系式：

$$J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}=\varepsilon_n. \tag{1}$$

换言之，$\varepsilon_n/J(f)$ 作为实向量空间由诸 $\dot{F}_i$ 生成.

证 必要性已由命题 6.1.2 建立，现证充分性. 将 f 的 p-参数形变 F 写为

$$F(u,x)=f(x)+\bar{f}(u,x),\ \bar{f}(0,x)=0,$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_p)$. 假设

$$G:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R},$$
$$(v,x)\mapsto f(x)+g(v,x),\quad g(0,x)=0$$

为 f 的任意形变，且带有 q 个参数 $v_1,\cdots,v_q$. 欲证 F 是 f 的通用形变，需证 G 同构于某一 h^*F，其中 $h:(\mathbb{R}^q,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽.

为便于研究，将 F 与 G 并成一个"更大"的形变，做 F 与 G 的"直和". 令

$$H:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R},$$
$$(v,u,x)\mapsto f(x)+g(v,x)+\bar{f}(u,x),$$

它是 f 的一个 $(p+q)$-参数形变. 将 H 在子空间 $v_1=0$, $v_1=v_2=0,\cdots,v_1=v_2=\cdots=v_q=0$ 上的限制分别记为 $H_1,H_2,\cdots,H_q$，显然 $H_q=F$. 又 H 在子空间 $u=0$ 上的限制是 G.

断言：存在淹没芽 $A:(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，使得 H 同构于 A^*F. (2)

对 q 使用归纳法，证明存在满足断言的淹没芽 A. 当 $q=0$

时，$H(0, u, x)=F(u, x)$. 令 $A=\mathrm{id}:(\mathbb{R}^p, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为恒同映射芽，显然 H 与$(\mathrm{id})^* F=F$ 是同构的. 假定结论在 $q-1$ 时成立，将$\mathbb{R}^{q-1}$嵌入到$\mathbb{R}^q$ 中，令$(v_2,\cdots,v_q)\mapsto(0, v_2,\cdots,v_q)$，并令

$$H_1(v_2,\cdots,v_q, u, x) = H(0, v_2,\cdots,v_q, u, x).$$

依归纳假设，存在淹没芽 $B:(\mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^p, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$使得 $B^* F$ 与H_1 是同构的，现证明断言对 q 亦成立.

将$\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 及$\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^p$ 上的 C^∞ 函数在原点处的芽所成之环分别记为 $\varepsilon_{v, u, x}$和$\varepsilon_{v, u}$. 设 $\varepsilon_{v, u, x}$中的理想$J(H)$由偏导数$\frac{\partial H}{\partial x_i}$生成$(i=1,\cdots,n)$，即

$$J(H) = \langle\frac{\partial H}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial X_n}\rangle\varepsilon_{v, u, x}.$$

据代数引理6.2.2,

$$J(H) + \varepsilon_{v, u}\left\{\frac{\partial H}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial u_p}\right\} = \varepsilon_{v, u, x}, \tag{3}$$

事实上，当 $u=v=0$ 时，

$$J(H)\mid_{u=v=0} = J(f),$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u_i}\right|_{u=v=0} = F_i, \quad i = 1,\cdots,p.$$

因此由(1)式可推出(3)式.

因为$\frac{\partial H}{\partial v_1}\in\varepsilon_{v, u, x}$，由(3)式知，存在 $X_i(v, u, x)\in\varepsilon_{v, u, x}(i=1,\cdots,n)$以及 $\xi_j(v, u)\in\varepsilon_{v, u}(j=1,\cdots,p)$，使得

$$-\frac{\partial H}{\partial v_1} = \sum_{i=1}^{n}X_i(v, u, x)\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p}\xi_j(v, u)\frac{\partial H}{\partial u_j},$$

于是向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial v_1} + \sum_{j=1}^{p} \xi_j(v, u) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} X_i(v, u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

使得

$$X \cdot H = 0,$$

根据几何引理 6.2.1,存在淹没芽 $C:(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^p, 0)$,使得 H 同构于$C^* H_1$. 然后令 $A = B \circ C$,则 H 同构于$A^* F$,其中 $A:(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$为淹没芽,断言(2)成立.

令 $h:(\mathbb{R}^q, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$为 A 在子空间$u=0$上的限制,$v \mapsto A(v, 0)$. 注意到H 在$u=0$ 上的限制为 G,从而 G 同构于$h^* F$.

由于所取的 G 是f 的任意形变,依定义,F 是f 的通用形变.

推论 6.3.1 $f \in \varepsilon_n$ 有通用形变当且仅当f 的余维数有限.

定义 6.3.1 设 $f \in \varepsilon_n$ 具有有限余维. f 的通用形变F 叫做万有形变,如果 F 所含的参数数目最少.

易见 f 的万有形变所含的参数个数等于f 的余维数. 下面提供一种方式来构作 f 的万有形变.

在 ε_n 中选取函数$g_1, \cdots, g_p$,使得它们在 $\varepsilon_n / J(f)$中的投影形成这一实向量空间的基,这意思是说$\mathbb{R}\{g_1, \cdots, g_p\} \subset \varepsilon_n$ 是 $J(f)$在 ε_n 中的补空间,并且 $p = \mathrm{Codim} f$,于是

$$F(t, x) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} t_i g_i(x)$$

便是 f 的万有形变.

例 1 设 f 为 Morse 芽,则 $J(f) = \mathcal{M}$,因此 f 的万有形变为 $F(t, x) = f(x) + t$.

例 2 在讨论余维数不大于 5 的函数芽的分类时,已给出 7 种标准形(见定理 3.4.1 和 3.4.4). 例如尖点的万有形变为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i x_i^2 \pm x^4 + t_1 x^2 + t_2 x + t_3,$$

其他 6 种标准形的万有形变由读者补述.

最后,将命题6.1.3与6.1.4改述为

定理6.3.2 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 是余维数为 p 的函数芽,则

(i) f 的所有 p-参数万有形变都是等价的,

(ii) 若 G 为 f 的任意通用形变,带有 $q(>p)$ 个参数,则 G 等价于万有形变的常值形变(含有 $q-p$ 个参数).

§6.4 通用形变与横截性

本节讨论通用形变与横截性之间的关系. 首先复述某些有关知识.

设 $f\in\varepsilon_n$ 具有有限余维,因而存在正整数 k,使得

$$\mathcal{M}_n^k\subset\mathcal{M}_n\cdot J(f).$$

将 f 在 $j^k:\varepsilon_n\to J_n^k=\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^{k+1}$ 下的像记为 j^kf,它表示为 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的 k 阶 Taylor 多项式. 群 L_n 在 ε_n 上的作用诱导出 Lie 群 L_n^k 在有限维 C^∞ 流形 J_n^k 上的作用,并且下列图表可换:

$$\begin{array}{ccc} L_n\times\varepsilon_n & \longrightarrow & \varepsilon_n \\ {\scriptstyle j^k\times j^k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j^k} \\ L_n^k\times J_n^k & \longrightarrow & J_n^k \end{array}$$

因此有 $j^k(L_n\cdot f)=L_n^k\cdot j^kf$. 据§1.3中公式(7)和(8),轨道 $L_n\cdot f$ 在 f 处的切空间及轨道 $L_n^k\cdot j^kf$ 在 j^kf 处的切空间分别表为

$$T_f(L_n\cdot f)=\mathcal{M}_n\cdot J(f)$$

和

$$T_{j^kf}(L_n^k\cdot j^kf)=j^k(\mathcal{M}_n\cdot J(f)).$$

一般来说,有

$$L_n\cdot f\subset(j^k)^{-1}(L_n^k\cdot j^kf),$$

然而我们有下列

命题 6.4.1 设 $f\in\varepsilon_n$. 若存在正整数 k,使得 $\mathcal{M}_n^k\subset\mathcal{M}_n\cdot J(f)$,则

$$L_n\cdot f=(j^k)^{-1}(L_n^k\cdot j^kf).$$

证明留作练习.

注 本命题实际上是 f 为 k-$\mathcal{R}$-决定的另一表述形式.

现假定 $F:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 为 $f\in\varepsilon_n$ 的任意形变,带有 p 个参数. 选取 F 的一个代表,仍记为 F,它定义在点 $0\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 的开邻域 U 上,

$$F:\ U\to\mathbb{R},\ (u,\ x)\mapsto F(u,\ x)=F_u(x),$$

F 看做是 n 元函数 F_u 的 p 参数族. 对于 U 中的每一点 $(u,\ x)$,可考虑 F_u 在点 x 处的 k 阶 Taylor 多项式,并将它等同于 J_n^k 中的元,于是定义 C^∞ 映射芽 j^kF 如下.

$$j^kF:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,\ 0)\to J_n^k,$$

$$(u,\ x)\mapsto j^kF_u(x)=F_u\text{ 在点 }x\text{ 处的}k\text{- 导网}.$$

显然

$$j^kF(0,\ 0)=j^kF_0(0)=j^kf.$$

定理 6.4.1 设 $f\in\varepsilon_n$ 使得

$$\mathcal{M}^{k+1}\subset J(f),$$

其中 $\mathcal{M}$ 为 ε_n 的极大理想. 假设 F 是 f 的 p-参数形变,那么下列条件等价:

(a) F 是 f 的通用形变,

(b) j^kF 在点 $(0,0)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 处横截于 $L_n^k\cdot j^kf\subset J_n^k$.

证 据定理 6.3.1,条件(a)等价于

$$J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}=\varepsilon_n,\tag{1}$$

条件(b)是指

$$\mathrm{D}j^kF(0,\ 0)(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n)+T_{j^kf}(L_n^k\cdot j^kf)=J_n^k.$$

而

$$\mathrm{D}j^kF(0,0)(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}\left\{\frac{\partial j^kF}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial j^kF}{\partial x_n},\frac{\partial j^kF}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial j^kF}{\partial u_p}\right\},$$

其中括号内的所有导数均在原点处取值. 又

$$T_{j^kf}(L_n^k\cdot j^kf)=j^k(\mathscr{M}\cdot J(f)),$$

所以条件(b)等价于

$$j^k(\mathscr{M}\cdot J(f))+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial j^kF}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial j^kF}{\partial x_n},\frac{\partial j^kF}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial j^kF}{\partial u_p}\right\}=J_n^k.\quad(2)$$

注意到

$$\frac{\partial j^kF}{\partial x_i}(0,\ 0)=j^k\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad i=1,\cdots,n,$$

及

$$j^k(\mathscr{M}\cdot J(f))+\mathbb{R}\left\{j^k\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,j^k\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}=j^k(J(f)),$$

因而(2)式等价于

$$j^k(J(f))+\mathbb{R}\left\{j^k\frac{\partial F}{\partial u_1},\cdots,j^k\frac{\partial F}{\partial u_p}\right\}=J_n^k,$$

或

$$j^k(J(f))+\mathbb{R}\{j^k\dot{F}_1,\cdots,j^k\dot{F}_p\}=J_n^k.\qquad(3)$$

在(1)式两边取 k-导网得(3)式. 又(3)式可写为

$$j^k(J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\})=j^k\varepsilon_n,$$

依假设,$J(f)\supset\mathscr{M}^{k+1}$,故由上式可推出

$$J(f)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_p\}=\varepsilon_n$$

即由(3)式推得(1)式. 从而(a)⇔(b).

§6.5 位势芽的通用形变

6.5.1 位势芽的形变

设 $f\in\varepsilon_n$. 将群 L_n 作用下过 f 的轨道 L_nf 记为 Γf,并将 Lie 群 L_n^k 的一条过 j^kf 的轨道 $L_n^k\cdot j^kf$ 记作 Γ^kf,显然 $j^k(\Gamma f)=\Gamma^kf$. 令

$$\bar{\Gamma}f=\Gamma f+\mathbb{R}.$$

设 $g\in\bar{\Gamma}f$,则 g 与某一 $h\in\Gamma f$ 相差一常数. 因 $h(0)=f(0)$,所以该常数 $=g(0)-h(0)=g(0)-f(0)$,于是

$$\bar{\Gamma}f=\{g\in\varepsilon_n\,|\,g-g(0)+f(0)\in\Gamma f\}.$$

$\bar{\Gamma}f$ 在 $j^k:\varepsilon_n\to J_n^k$ 下的像

$$j^k(\bar{\Gamma}f)=j^k(\Gamma f+\mathbb{R})=\Gamma^kf+\mathbb{R},$$

因此规定 $\bar{\Gamma}^kf=\Gamma^kf+\mathbb{R}$.

现给出一些术语如下. 将 $\varepsilon_n/\mathbb{R}$ 的成员叫做在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的位势芽. 两个函数芽 f, $g\in\varepsilon_n$ 确定相同的位势,如果它们只相差一常数;f 与 g 确定同构的位势,若 $g\in\bar{\Gamma}f$ 或 $\bar{\Gamma}f=\bar{\Gamma}g$. 由于 $\varepsilon_n/R\cong\mathscr{M}_n$,因此极大理想 $\mathscr{M}_n$ 中的每一成员均可作为位势芽的代表,或简称为位势芽.

以 $f\in\varepsilon_n$ 为代表的位势芽的 p-参数形变可用 f 的 p-参数形变 $F(\in\varepsilon_{p+n})$ 作为代表. 如果函数芽 $G(\in\varepsilon_{p+n})$ 使得 $G-F=C$,其中 C 是一个仅依赖于参数 $u\in(\mathbb{R}^p,0)$ 的函数芽,则说 G 和 F 确定(以 f 为代表的)位势芽的相同形变;如果 G 同构于 h^*F+C,其中 h 是参数空间之间的局部微分同胚,C 如上所述,则说 F 与 G 作为位势芽的形变是等价的.

现假定 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 具有有限余维. 若 $g_1,\cdots,g_r\in\varepsilon_n$ 使得

$$J(f)\oplus\mathbb{R}\{g_1,\cdots,g_r\}=\mathscr{M}_n,$$

其中 $g_1,\cdots,g_r$ 组成$J(f)$在 $\mathscr{M}_n$ 中的补空间的基,$\oplus$表直和. 对任意 $p\geqslant r$,令 F_p 为f 的p-参数形变,定义为

$$F_p(u_1,\cdots,u_p,\ x)=f(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(x),$$

显然 F_p+t($t\in\mathbb{R}$ 为添加的参数)是 f 的万有形变.

由于 f 具有有限余维,故存在正整数 k,使得 $\mathscr{M}_n\cdot J(f)\supset\mathscr{M}_n^{k+1}$,应用定理 6.4.1 可得到

命题 6.5.1 设 G 为$f\in\mathscr{M}_n^2$ 的p-参数形变,又 $J(f)\supset\mathscr{M}_n^{k+1}$. 若 $j^kG:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n,0)\to J_n^k$ 在点 $0\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^n$ 横截于 $\overline{\Gamma}^kf$,则 G 和 F_p 作为位势芽的形变是等价的.

证明是容易的,留作练习.

我们将满足上述横截性条件的形变(例如 G 和 F_p)叫做位势芽 f 的p-参数万有形变.

例 1 设 $f\in\varepsilon_n$ 为 Morse 芽,则 f 的任意一个常值形变均表示位势芽的万有形变.

例 2 设芽 $f(x,\ y)=x^3+y^3$,则

$$J(f)\oplus\mathbb{R}\{x,\ y,\ xy\}=\mathscr{M}_2,$$

因此位势芽 f 的万有形变为

$$F(u_1,\ u_2,\ u_3,\ x,\ y)=x^3+y^3+u_1xy+u_2x+u_3y.$$

例 3 将余维数不大于 5 的函数芽 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 视为位势芽,它们的万有形变等价于下列芽之一.

注 关于奇点 $f\in\mathscr{M}_n^2$ 的余维数,有些作者采用另外的定义. 例如 Th. Bröcker 和 L. Lander 在他们的著作[9]中,将

$$c(f)=\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}_n/J(f)<+\infty$$

编号	名称	$\dim_{\mathbb{R}}$ $\mathscr{M}_n/J(f)$	余秩	万有形变($\delta_i = \pm 1$)
(0)	Morse 芽	0	0	$\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i^2$
(1)	折叠	1	1	$\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i x_i^2 + x^3 + u_1 x$
(2)	尖点	2	1	$\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i x_i^2 \pm x^4 + u_1 x^2 + u_2 x$
(3)	燕尾	3	1	$\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i x_i^2 + x^5 + u_1 x^3 + u_2 x^2 + u_3 x$
(4)	蝴蝶	4	1	$\sum_{i=1}^{n-1}\delta_i x_i^2 \pm x^6 + u_1 x^4 + u_2 x^3 + u_3 x^2 + u_4 x$
(5)	椭圆脐点	3	2	$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2 + x^3 - xy^2 + u_1(x^2 + y^2) + u_2 x + u_3 y$
(6)	双曲脐点	3	2	$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2 + x^3 + xy^2 + u_1(x^2 - y^2) + u_2 x + u_3 y$
(7)	抛物脐点	4	2	$\sum_{i=1}^{n-2}\delta_i x_i^2 + x^2 y \pm y^4 + u_1 y^3 + u_2 y^2 + u_3 x + u_4 y$

称为 f 的余维数. Thom 在他的早期研究中,曾用上述 $c(f)$作为奇点 f 的余维数. 从上表可见,$c(f)$与表中奇点 f 的万有形变所含的形变参数个数相同,或说与 Thom 初等突变模型(参看本节第三段)的控制参数(亦称外参数)个数相一致. 易见,$c(f)$和 Codim$f$(见定义 3.2.4)相差 1,即 Codim$f = c(f) + 1$.

6.5.2 $C^\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$中的一个通有性质

设F: $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(u, x)\mapsto F(u, x) = F_u(x)$为 C^∞函数,它可以看做变量 x 的n 元实值函数F_u 的 4-参数族,$u\in\mathbb{R}^4$ 为参数. 设想 $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$表示四维时空空间中的点(例如 u_1 表时间,(u_2, u_3, u_4)代表生活的三维空间中点的位置),$x\in\mathbb{R}^n$为描述系统的状态变量,F 表示系统的位能. 显然考虑这样的函数具有实际意义,并且立即可看到它与 Thom 的初等突变

模型有关联．本段讨论所有的 C^∞ 函数 $\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 组成之集 $C^\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，并赋予了拓扑结构(见§2.4)．

定理 6.5.1 对于 $C^\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$而言，下列性质是通有的：设 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$，则

(i) 对每一$(u_0,\ x_0)\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n$，$F_{u_0}$ 在点 x_0 处的芽(看做 ε_n 中一元)的余维数不大于 5，

(ii) F 在点$(u_0,\ x_0)$处的芽是以 F_{u_0} 所确定的位势芽的通用形变．

证 首先注意到余维数不大于 5 的函数芽 $f\in\varepsilon_n$ 必满足

$$\mathscr{M}\cdot J(f)\supset\mathscr{M}^6,$$

据定理 3.3.1，f 是 6-决定的．这样可限制在 $J^6_{n,1}$ 中讨论．其次，在这一向量空间中考察轨道 $\Gamma^6 f_i$，这里 f_i 为例 3 中的 8 种标准形连同非奇异芽(它右等价于坐标函数芽)，显然 $\mathrm{Codim} f_i\leqslant 5$．将 $J^6_{n,1}$ 简记为 J^6_n．

$\Gamma^6 f_i$ 是J^6_n 中的子流形，现计算它们的余维数．

$$\begin{aligned}\mathrm{Codim}\Gamma^6 f_i &= \dim_{\mathbb{R}} J^6_n/T_{j^6 f_i}\Gamma^6 f_i = \dim_{\mathbb{R}} j^6(\varepsilon_n)/j^6(\mathscr{M}\cdot J(f_i))\\ &= \dim_{\mathbb{R}}\varepsilon_n/\mathscr{M}\cdot J(f_i) = \mathrm{Codim}\Gamma f_i.\end{aligned}$$

当 $\mathrm{Codim} f_i\geqslant 1$(此时 $f_i\in\mathscr{M}^2$)时，据命题 3.2.3，

$$\begin{aligned}\mathrm{Codim}\mathscr{M}\cdot J(f_i) &= n+\mathrm{Codim} J(f_i)\\ &= n+\mathrm{Codim} f_i,\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{Codim}\Gamma^6 f_i=\begin{cases}1, & 若\ \mathrm{Codim} f_i=0,\\ n+1, & 若\ \mathrm{Codim} f_i=1,\\ n+r, & 若\ \mathrm{Codim} f_i=r,\quad 2\leqslant r\leqslant 5.\end{cases}$$

由于子流形 $\bar{\Gamma}^6 f_i = \Gamma^6 f_i + \mathbb{R}$,因此

$$\mathrm{Codim}\bar{\Gamma}^6 f_i = \begin{cases} 0, & 若\ \mathrm{Codim} f_i = 0, \\ n, & 若\ \mathrm{Codim} f_i = 1, \\ n + r - 1, & 若\ \mathrm{Codim} f_i = r, \quad 2 \leqslant r \leqslant 5. \end{cases}$$

另一方面,若 $f \in \varepsilon_n$ 使得 $j^6 f \notin \bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$,则 $\mathrm{Codim} f > 5$. 进而有下面的

断言:令 $\Sigma = J_n^6 - \bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$,则 Σ 是有限个子流形的并,且这些子流形的余维数不小于 $n+5$.

然后应用命题 6.5.1 及定理 2.4.4 便可推出本定理. 最后给出断言的证明概要.

将 J_n^6 中余秩为 c 的导网所成之集记为 S_c,可以证明它是 J_n^6 中余维为 $n + \dfrac{c(c+1)}{2}$ 的子流形. 若 $c \geqslant 3$,则 S_c 位于 $\bigcup_i \bar{\Gamma}^6 f_i$ 的补空间内,并且它是余维数不小于 $n+6$ 的子流形. 下面仅对 $S_1 \cap \Sigma$ 及 $S_2 \cap \Sigma$ 讨论. 利用分裂引理容易证明 $S_1 \cap \Sigma$ 是 S_1 中的子流形,其余维数为 4,因而 $S_1 \cap \Sigma$ 是 J_n^6 中余维为 $n+5$ 的子流形. 而对于 $S_2 \cap \Sigma$,可将它分解为 3 个子流形的并,这 3 个子流形的余维数分别为 $n+5$, $n+5$ 和 $n+7$.

6.5.3 初等突变浅介

设 $F: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数,如第二段所述,它表示系统的位能,$u \in \mathbb{R}^4$ 为时空空间中的点,$x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态变量. 令 $\pi: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^4$ 表标准投影.

对于取定的 $u \in \mathbb{R}^4$,系统在 u 的"稳定"状态用 $\pi^{-1}(u)$中的点 x 来表示,并且要求 F 在$\pi^{-1}(u)$上的限制 F_u 在点x 取得局部极小值,于是自然研究下列子集:

$$\Sigma = \{(u, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \mid x\ 为\ F_u\ 的临界点\}$$

$$= \{(u, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, \cdots, n\},$$

该子集包含所有局部稳定状态. 方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

叫做系统的状态方程组.

例 4 取 $n = 1, F = x^4 + u_1 x^2 + u_2 x$, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. 该函数表示位势 x^4 的万有形变,其状态方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2u_1 x + u_2 = 0, \tag{1}$$

它确定$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ 中的超曲面 Σ,其方程为

$$u_2 = -2u_1 x - 4x^3.$$

考虑投影 $\pi: \Sigma \to \mathbb{R}^4$, $(u, x) \mapsto u$, 它是标准投影$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ 在 Σ 上的限制. 以下用$\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$来代替$\mathbb{R}^4$. π 的奇点集由下列方程确定:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x^2 + 2u_1 = 0, \tag{2}$$

由(1)和(2)式解得

$$S: \begin{cases} u_1 = -6x^2, \\ u_2 = 8x^3. \end{cases}$$

S 是π 的奇点集($\subset \Sigma$)在$\mathbb{R}^2(u_1, u_2)$上的投影,这是一条带尖点的半立方抛物线. 它将平面分为两部分:较大部分 Ω_1 和较小部分 Ω_2. 若 $u \in \Omega_1$, $\pi^{-1}(u) \subset \Sigma$ 仅由一点组成,它是 F_u 的极小值点. 若 $u \in \Omega_2$, $\pi^{-1}(u)$由 3 个点组成,其中两个为极小值点,另一个为极大值点(非稳定状态),当 $u \in \Omega_1$ 时,观测的系统状态完全由状态方程决定,并且随 u 而连续变化. 反之,若 $u \in \Omega_2$,存在两种可

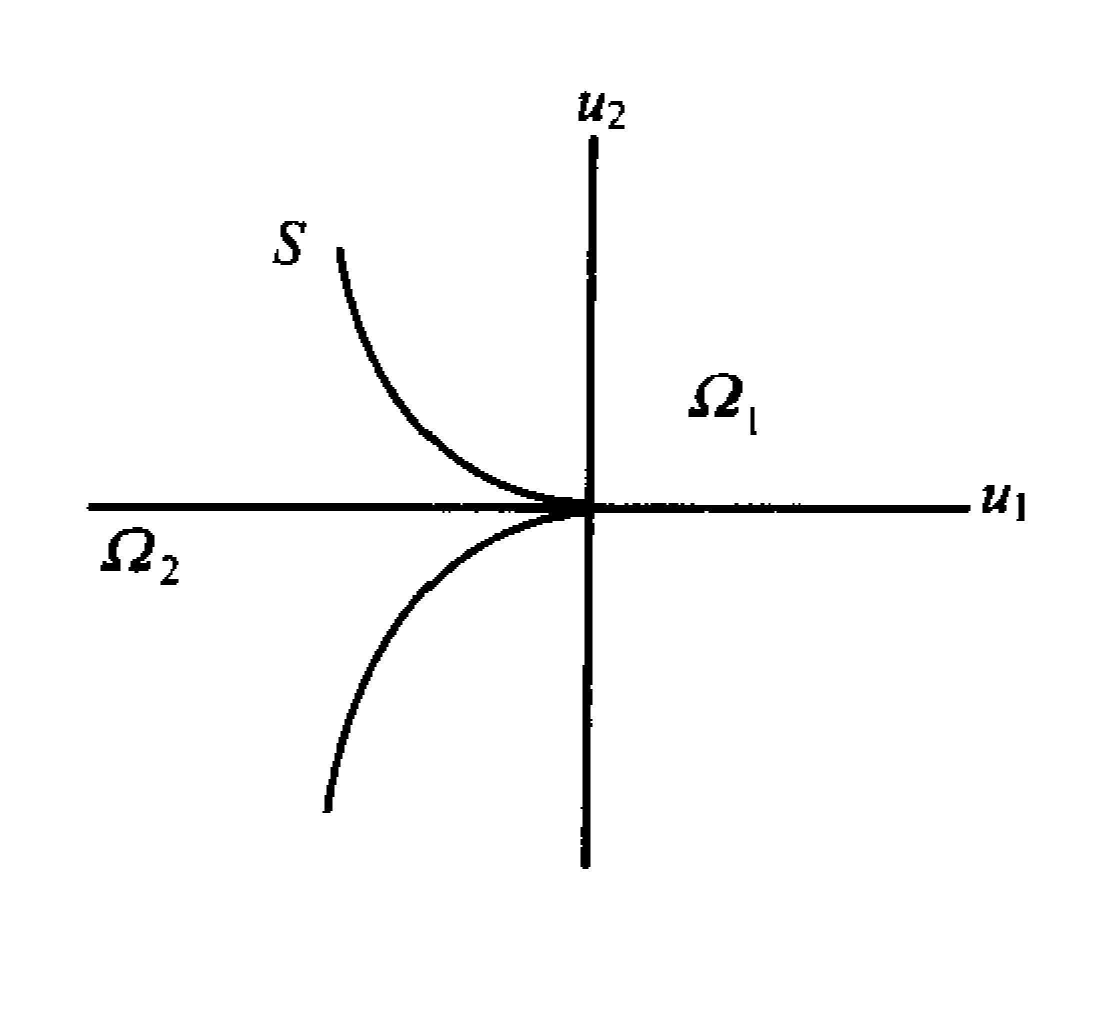


图 6.2

能的状态，并且观测的状态需要用附加的信息来确定. 例如，"Maxwell 约定"认为总应该选取局部极小值中的最小者. 另一方面，"延滞规则"则叙述为当 u 从 Ω_1 越过 S 到达 Ω_2 并且出现新增的局部极小值时，观测到的状态由 Ω_2 上的局部极小值来确定. 而这一极小值则由 Ω_1 上的惟一极小值连续演变过来，直到它消失为止. 而一旦它消失，若状态由另一极小值来确定，则系统的状态出现突变. 因为曲线 S 是点 u 的轨迹，它使得 F_u 的极小值数目发生变化，因此在 S 上的点的附近，人们观测到系统的状态可能发生突变现象. 曲线 S 叫做突变集或分歧集.

现回到一般情形，并作如下假定：

(H) 函数 F 满足定理 6.5.1 的通有性质，(等价于物理规律中的"稳定性"假设).

在假定(H)下，F 作为位势芽的形变在集 Σ 的每一点处，恰好同构于例 3 中列举的 8 种芽之一. 借助于这些模型，有可能在集 $\Sigma\subset\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^n$ 的每一点处，描述投影 $\pi:\Sigma\to\mathbb{R}^4$ 的局部结构，并且把系统的稳定状态看做是点 $u\in\mathbb{R}^4$ 的函数. 正如例 4 中所讨论的，集 $S\subset\mathbb{R}^4$ 是 $\pi:\Sigma\to\mathbb{R}^4$ 在$\mathbb{R}^4$ 中的奇点集或者说是这一投影下的可见轮廓. S 也叫做系统的突变集. 正因为例 3 中的模型(1)至(7)(模型(0)对应于投影 π 的非奇异点)能描述 S 在每一点处的局部结构(仅相差一微分同胚)，因此这 7 种模型统称为 Thom 的初等突变模型. 对于突变理论感兴趣的读者可参看文献[2].

第七章　平面到平面的光滑映射的奇点

§7.1　引　　言

H. Whitney 在 1955 年发表的论文《平面到平面的映射》开创了光滑映射的奇点理论这一门新的数学分支的研究.

一个曲面到平面的映射将曲面上的每一个点对应于平面上的一个点. 在我们周围,光滑曲面到平面上的光滑映射处处可见. 事实上,我们周围大多数物体的边界都是光滑曲面,物体的可见轮廓就是其边界曲面在眼睛的视网膜上的投影. 通过考察四周的物体,譬如人的面部,我们就可以发现可见轮廓的奇点. Whitney 发现,在一般状况下,只会碰到两类奇点,这就是折叠与尖点. 这两类奇点是稳定的,即每个相邻近的映射都在一适当的邻近点上仍有这种奇点. 例如从下图中的奶瓶可以看到两个尖点. 我们稍许挪动一下瓶子. 就可推出尖点是稳定的结论.

值得指出的是,这两类奇点在适当的坐标系下都可以表示为最简洁的形式,即所谓标准形. 所需实施的坐标变换不只限于映射的源空间,还需要在靶空间进行. 现引入一般的

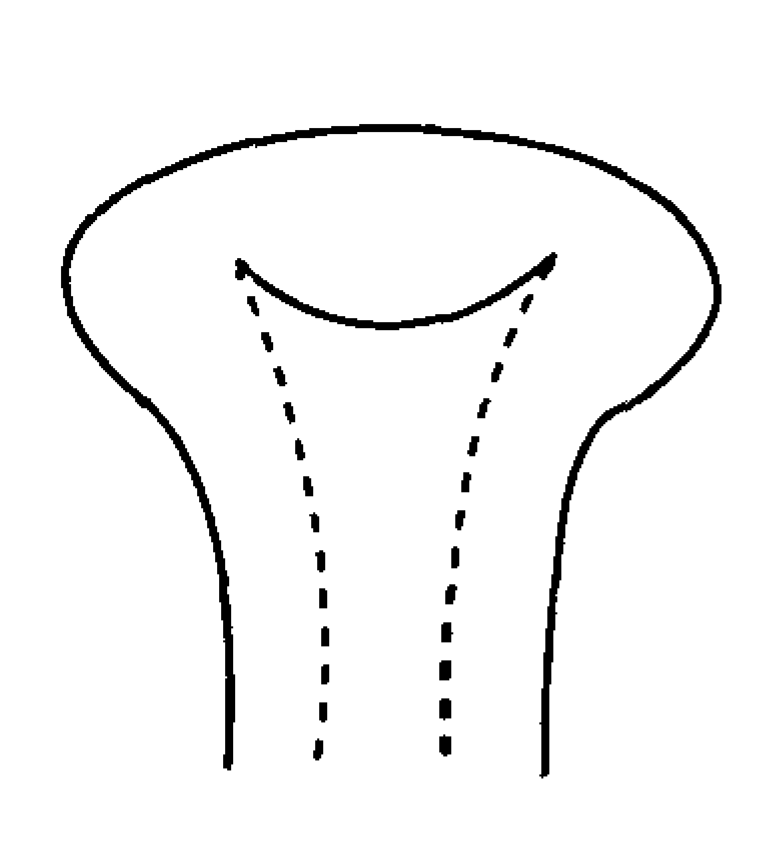


图 7.1

定义 7.1.1　设有两个 C^∞ 映射芽 f, g: $(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$. 如果存在微分同胚芽 ϕ:$(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 和 ψ: $(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得

$$g = \psi\circ f\circ\phi^{-1},$$

则说 f 与 g 是左右等价的或依 Mather 的说法,f 与 g 是 $\mathscr{A}$-等价

的，记为 $f\widetilde{\mathscr{A}}g$. 显然"$\widetilde{\mathscr{A}}$"是一个等价关系. 令

$$\mathscr{R} = \{\phi:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 可逆芽}\},$$

$$\mathscr{L} = \{\psi:(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 可逆芽}\},$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{R} \times \mathscr{L},$$

以映射芽的复合作为群运算，$\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$ 因而 $\mathscr{A}$ 均为群. 分别叫做右等价群和左等价群及左右等价群. 记

$$\varepsilon^0(n, p) = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽}\},$$

群 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon^0(n, p)$ 上的作用定义为

$$(\phi, \psi)\cdot f = \psi \circ f \circ \phi^{-1},\ (\phi, \psi) \in \mathscr{A},\ f \in \varepsilon^0(n, p).$$

当 $p=1$ 时，$\varepsilon^0(n, 1)=\mathscr{M}_n$. 前面几章讨论函数芽已得到一些颇为满意的结果，但使用的局部坐标变换限于函数芽的源空间. 然而当 $p>1$ 时，研究的对象是 C^∞ 映射芽，仅使用源空间的微分同胚芽群难以获得有意义的结果，本章的研究表明需要考虑左右等价群.

设 $F: (\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}^2, 0)$ 为 C^∞ 映射芽. 将源空间的坐标记为 (x, y)，靶空间的坐标记为 (u, v)，则 F 可写为

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

并且 $u(0, 0)=0, v(0, 0)=0$.

若 F 在 $0\in\mathbb{R}^2$ 具有极大秩 2，则 F 在原点的 Jucobi 矩阵 $DF(0)$ 为可逆矩阵. 依反函数定理，F 是一个微分同胚芽，因而 $\mathscr{A}$-等价于映射

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y, \end{cases}$$

原点是 F 的正常点，注意，上述映射不是恒同映射，因源平面与靶

平面应看成两个不同的平面.

若 F 在 $0\in\mathbb{R}^2$ 的秩小于 2,则原点是 F 的奇点. 特别考虑 $\mathrm{D}F(0)$的秩为 1 的情形,有

引理 7.1.1 设 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$为 C^∞映射芽. 若 F 在点 $0\in\mathbb{R}^2$ 的秩为 1,则 F 左右等价于下列映射芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=0$.

证 在 F 的源平面与靶平面上分别作非退化线性坐标变换 A 和B,使得

$$B\circ \mathrm{D}F(0)\circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\widetilde{F}=B\circ F\circ A$ 的坐标函数为$(\tilde{u}(x,y),\tilde{v}(x,y))$,则

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0) = 1,\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(0) = 0.$$

然后令

$$\phi:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),$$

$$(x,y)\mapsto(\tilde{u}(x,y),y),$$

则 $\mathrm{D}\phi(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\phi\in\mathscr{R}$. 易见 $\widetilde{F}\circ\phi^{-1}$具有形式(1). 证毕.

从现在起,假定 F 具有形式(1). 此外,下面讨论中叙述的性质或条件应理解为局部的,即在原点的足够小邻域内才成立.

§7.2 折叠与尖点

7.2.1 两类奇点的定义

假设

$$F:\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

那么 F 的 Thom 一阶奇点集

$$\begin{aligned} \Sigma^1(F) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dim(\mathrm{Ker}DF(x, y)) = 1\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0\right\}, \end{aligned}$$

显然 $\Sigma^1(F)$包含原点. 方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \tag{2}$$

表示一条过原点的平面曲线. 进而假定

(H_1) 微分 $\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$在原点处不为零.

因为

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\mathrm{d}y,$$

所以假定(H_1)意指$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)$不全为 0. 据隐函数定理, 由方程(2)确定的隐函数在 $0 \in \mathbb{R}$ 附近存在导数,或者说曲线 $\Sigma^1(F)$在平面上原点附近有切线,并且切线由下列线性方程确定:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\mathrm{d}y = 0. \tag{3}$$

另一方面,F 的微分 DF 是一线性映射,因此在曲线 $\Sigma^1(F)$ 的每一点上,自然考虑 DF 的核. 因为当$(x, y) \in \Sigma^1(F)$时,

$$\mathrm{rank}DF(x, y) = 1,$$

所以 $\mathrm{Ker}(DF(x, y))$为直线,它由方程

$$\mathrm{d}x = 0 \tag{4}$$

确定.

这样一来,$\Sigma^1(F)$在原点处的切线和$DF(0)$的核或者相交或者重合,下面分别讨论.

第一种情形:$\Sigma^1(F)$在原点的切线和$\mathrm{Ker}DF(0)$相交.根据上述方程(3)和(4),它可以用

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0 \tag{5}$$

来描述,并且(5)式蕴涵假定(H_1)成立.应用隐函数定理于方程(2)可确定隐函数$y=h(x)$,并且曲线$\Sigma^1(F)$为函数$y=h(x)$的图像.F在$\Sigma^1(F)$上的限制

$$F|\Sigma^1(F):(\Sigma^1(F),0)\to(\mathbb{R}^2,0)$$

显然是一个浸入.

定义 7.2.1 每一个满足条件(1)和(2)及(5)的映射芽称为折叠.

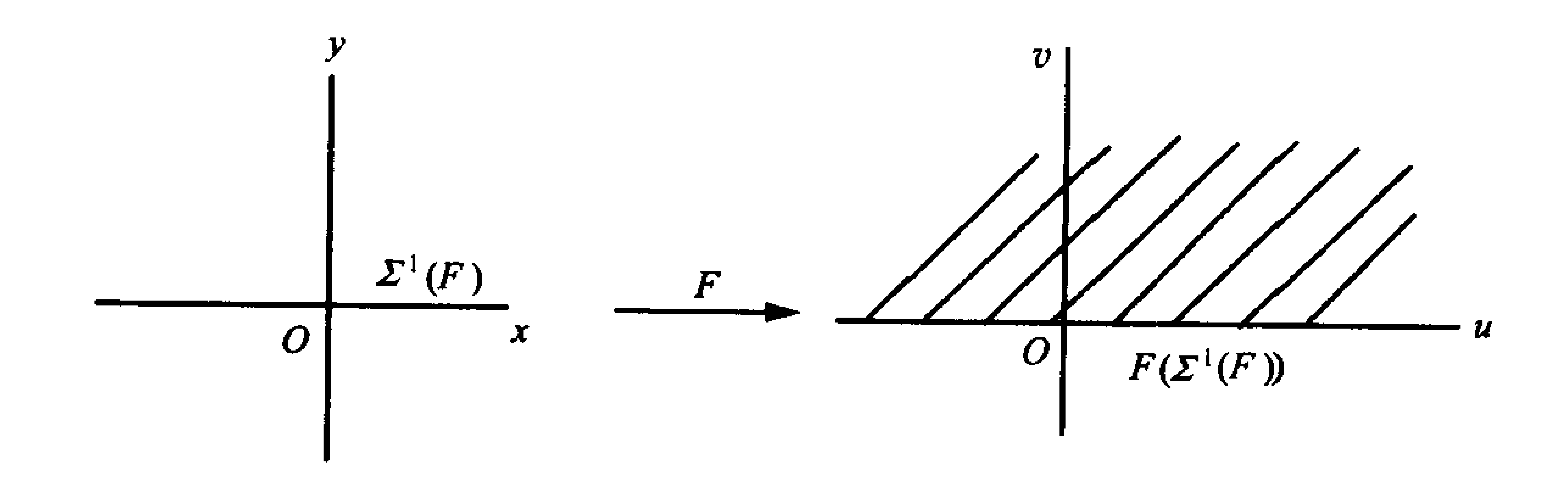


图 7.2

例 1 设芽$F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^2, \end{cases}$$

显然F是一个折叠,$\Sigma^1(F)$为x轴,$F(\Sigma^1(F))$为u轴,F将源平

面映成靶平面的上半平面(包括 u 轴). 点(u, v)(其中 $v>0$)是源平面中两个点的像.

第二种情形:$\Sigma^1(F)$在原点的切线与$DF(0)$的核相重合. 在分析上它表示为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0, \tag{6}$$

在几何上则表示 F 在曲线$\Sigma^1(F)$上的限制 $F|\Sigma^1(F)$在原点的秩为0. 令

$$\Sigma^{1,1}(F) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0\right\}.$$

在假定(H_1)下,由方程(3)与(4)可见,$\Sigma^{1,1}(F)$中的点具有下述性质:$\Sigma^1(F)$在该点的切线和 DF 在该点的核相重. 原点属于$\Sigma^{1,1}(F)$.进而假定 $\Sigma^{1,1}(F)$是平面上的子流形,其余维数为2,因而它由一些孤立点组成. 更精确地说,假定

(H_2) 函数$\frac{\partial f}{\partial y}$与$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$在原点是独立的.

换言之,微分 $\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$和 $\mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$在原点处是线性独立的,这在分析上表示为

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_0 \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_0 \neq 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0)\mathrm{d}x \wedge \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0)\mathrm{d}x + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0)\mathrm{d}y\right) \neq 0,$$

从而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0 \text{ 且 } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0. \tag{7}$$

显然$(H_2) \Rightarrow (H_1)$.

定义 7.2.2 每一个满足条件(1),(2),(6)及(7)的映射芽称为尖点.

例 2 设 $F: (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$定义为

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - xy, \end{cases}$$

它是一个尖点,这是§2.1 中的例 3,并且§2.5 中的例 1 也对此讨论过.

最后就 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的秩为 0 的情形讨论. 设 F 的坐标表示为

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases}$$

使 F 的秩为 0 的点(x, y)由下列 4 个方程决定:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

一般来说,两个变量的 4 个方程无解,因此要求 F 的秩不小于 1 似乎是合理的.

7.2.2 标准形

本段讨论折叠和尖点这两类奇点的标准形. 为了更好地理解下面的 Whitney 定理的证明,我们从分析 F 入手,对所要施行的坐标变换作进一步的认识.

假设 $F: (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$具有形式(1),即

$$F: \begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

在几何上它可描述为

$$\pi_t \circ F = \pi_s,$$

其中 $\pi_s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$ 表源平面到$\mathbb{R}$上的投影, $\pi_t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto u$ 为靶平面到$\mathbb{R}$上的投影. 将源平面与靶平面看作

$\mathbb{R}$上的纤维空间,F将源平面上的每一条纤维送至靶平面的一条纤维,因此说 F 是它在纤维 $\pi_s^{-1}(0)$上的限制 $v=f(0,y)$的单参数开折,参数为 x.

考虑到 F 可看作是以 x 为参数的单参数开折这一特点,引入下面的等价关系.

定义 7.2.3 设 F,G 均具有形式(1).说 F 与 G 是等价的,如果存在$(\phi,\psi)\in\mathscr{A}$以及参数空间之间的微分同胚芽 $\theta:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$,使得

(i) $\pi_s\circ\phi=\theta\circ\pi_s,\quad \pi_t\circ\psi=\theta\circ\pi_t$,

(ii) $G=\psi\circ F\circ\phi^{-1}$.

特别,当 θ 为恒同映射芽时,称 F 与 G 是 $\mathscr{A}$-同构的.

定理 7.2.1(Whitney 定理) (i) 每一个折叠 $\mathscr{A}$-等价于下列形式给出的芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^2, \end{cases}$$

(ii)每一个尖点 $\mathscr{A}$-等价于下列形式的芽

$$\begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - xy. \end{cases}$$

证 设 $F:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$具有形式(1).

(i) 假定 F 为折叠,那么

$$f(0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0)=0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)\neq 0.$$

因而 $f(0,y)$作为 y 的函数芽是 Morse 芽,$f(x,y)$可视为 $f(0,y)$的 1-参数形变,参数为 x. 根据命题 1.4.1,$f(0,y)$右等价于芽 $g(y)=\pm y^2$. 而 g 的万有形变为$g(y)+t$,因此 $f(x,y)$同构于$\pm y^2+h(x)$,F 作为$f(0,y)$的单参数开折同构于

$$G:\begin{cases} u = x, \\ v = \pm y^2 + h(x),\ h(0) = 0, \end{cases}$$

这里只用到源平面的微分同胚芽 $\phi \in \mathscr{R}$,且有 $\pi_s = \pi_s \circ \phi$. 然后定义 $\psi \in \mathscr{L}$ 为

$$\psi(u, v) = (u, \pm v - h(u)),$$

显然 $\pi_t = \pi_t \circ \psi$,且 $\psi \circ G$ 具有定理(i)中的形式.

(ii) 设 F 为尖点. 按定义,F 具有形式

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases}$$

其中 $f(0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0, \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0$ 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0$.

据命题 1.4.1,$f(0, y)$作为 y 的函数芽右等价于y^3,而 y^3 的万有形变为 $g(t_0, t_1, y) = y^3 + t_0 y + t_1$. 又 $f(x, y)$视为 $f(0, y)$的 1-参数形变,参数为 x,因此 $f(x, y)$同构于 $h^* g$,其中

$$h:(\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0),$$

$$x \mapsto (-h_0(x), h_1(x)),\ h_0(0) = 0,\ h_1(0) = 0,$$

于是 F 作为$f(0, y)$的 1-参数开折同构于

$$G:\begin{cases} u = x, \\ v = y^3 - h_0(x)y + h_1(x), \end{cases}$$

这里仅使用源平面的局部微分同胚 $\phi \in \mathscr{R}$,且 $\pi_s = \pi_s \circ \phi$. 为消去 $h_1(x)$,令 $\psi \in \mathscr{L}$ 为

$$\psi(u, v) = (u, v - h_1(u)),$$

显然 $\pi_t = \pi_t \circ \psi$. 将 ψ 与G 复合,得

$$\psi \circ G(x, y) = (x, y^3 - h_0(x)y).$$

以上暂未用到条件$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0$,然而这一不等式所反映的性质被上述各种坐标变换保留下来,并且它表示

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(y^3 - h_0(x)y)\Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

因而$\frac{\mathrm{d}h_0}{\mathrm{d}x}(0) \neq 0$,于是 h_0 是参数空间$\mathbb{R}(x)$上的局部微分同胚. 最后,令

$$\tilde{\phi}(x, y) = (h_0(x), y),$$

$$\tilde{\psi}(u, v) = (h_0(u), v),$$

易见

$$\tilde{\phi} \in \mathscr{R}, \ \pi_s \circ \tilde{\phi} = h_0 \circ \pi_s,$$

$$\tilde{\psi} \in \mathscr{L}, \ \pi_t \circ \tilde{\psi} = h_0 \circ \pi_t.$$

记 $\tilde{F} = \psi \circ G$,则 $\tilde{F}(x, y) = (x, y^3 - h_0(x)y)$. 并且为方便起见,令 $\tilde{G}(x, y) = (x, y^3 - xy)$,则有

$$\tilde{G} \circ \tilde{\phi}(x, y) = (h_0(x), y^3 - h_0(x)y),$$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{F}(x, y) = (h_0(x), y^3 - h_0(x)y),$$

从而 $\tilde{\psi} \circ \tilde{F} \circ \tilde{\phi}^{-1} = \tilde{G}$,正是我们所希望的.

§7.3 在一般状况下平面到平面的映射的奇点

7.3.1 空间 $J_{2,2}^{2,0}$ 及其分解

设 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为 C^∞ 映射,$x_0 \in \mathbb{R}^2$. 依 Taylor 公式,

$$F(x) - F(x_0) = P_1(\xi) + P_2(\xi) + R(\xi), \ \xi = x - x_0,$$

其中 $P_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为线性映射,P_2: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为二次齐次多项式映

射，余项 R 的分量属于 $\mathscr{M}^3$. 将 $F-F(x_0)$在点 x_0 处的2-导网记为 $j_0^2F(x_0)$(见§2.4)，则

$$j_0^2F(x_0)=(P_1,\ P_2)\in J_{2,2}^{2,0},$$

这是因为 $J_{2,2}^{2,0}$表示从$\mathbb{R}^2$ 到$\mathbb{R}^2$ 的次数不大于2且常数项为0的多项式映射所成的向量空间，因此 $J_{2,2}^{2,0}$中的成员可表为(A,B)，其中 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为线性映射，$B:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为二次齐次多项式映射. 设源平面的坐标为 $x,\ y$，则

$$A(x,\ y)=\begin{pmatrix}ax+by\\ a'x+b'y\end{pmatrix},$$

$$B(x,\ y)=\begin{pmatrix}\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2\\ \alpha'x^2+2\beta'xy+\gamma'y^2\end{pmatrix},\tag{1}$$

实数 $a,\ b,\ a',\ b',\ \alpha,\beta,\gamma,\alpha',\beta',\gamma'$形成$J_{2,2}^{2,0}$的坐标系，$J_{2,2}^{2,0}$可等同于欧氏空间$\mathbb{R}^{10}$. 群 $\mathscr{A}$在 $J_{2,2}^{2,0}$上的作用是通过对群 $\mathscr{A}$的元素取2-导网来作用的.

令 $\pi:\ J_{2,2}^{2,0}\to L(2,2)$为 $\pi(A,\ B)=A$，其中 $L(2,2)$表$\mathbb{R}^2$ 到$\mathbb{R}^2$ 的线性映射所成之空间. 在§2.5中曾对 $L(n,\ p)$定义了子集 Σ^i，现在 $n=p=2$，有

$$\Sigma^i=\{A\in L(2,\ 2)\mid \dim\mathrm{Ker}A=i\},\ i=0,1,2,$$

它是 $L(2,2)$中余维为 i^2 的微分子流形. 令

$$\widetilde{\Sigma}^i=\pi^{-1}(\Sigma^i),$$

则 $\widetilde{\Sigma}^i$ 是$J_{2,2}^{2,0}$中余维数也是 i^2 的微分子流形，并且 $J_{2,2}^{2,0}$可分解为

$$J_{2,2}^{2,0}=\widetilde{\Sigma}^0\cup\widetilde{\Sigma}^1\cup\widetilde{\Sigma}^2.$$

下面对 $\widetilde{\Sigma}^1$ 再作分解. 令 $\Sigma^{1,1}\subset\widetilde{\Sigma}^1$ 定义为

$$\Sigma^{1,1}=\{(A,\ B)\in J_{2,2}^{2,0}\mid A\in\Sigma^1\ 且\ B(\mathrm{Ker}A)\subset\mathrm{Im}A\}.$$

命题 7.3.1 集 $\Sigma^{1,1}$是 $J_{2,2}^{2,0}$中余维数为 2 的子流形,该子流形在群 $\mathscr{A}$的作用下不变.

证 设$(A,B)\in J_{2,2}^{2,0}$,用源平面的坐标 x, y 来表示,如(1)式所述. 不失一般性,假设 $a\neq 0$.

$(A, B)\in\Sigma^{1,1}$等价于下列条件成立:

(i) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b = 0$ 或 $b' = \dfrac{a'}{a}b$,这是因为 A 的秩为 1.

(ii) $B(b, -a)$与向量(a, a')成比例. 事实上,$\mathrm{Ker}A$ 是源平面的一维向量子空间,它是一条过原点的直线,点$(b, -a)$在该直线上,或说向量$(b, -a)$生成直线 $\mathrm{Ker}A$. 显然点$(1,0)$不在这条直线上. 而像 $\mathrm{Im}A$ 是靶平面的一条直线(因 $\mathrm{rank}A = 1$),它由向量 $A(1,0) = (a, a')$生成. 由 $\Sigma^{1,1}$的定义知,$B(b, -a)$与向量(a, a')成比例.

此外,(ii)等价于

(iii) $\det\begin{pmatrix} \alpha b^2 - 2\beta ab + \gamma a^2 & a \\ \alpha' b^2 - 2\beta' ab + \gamma' a^2 & a' \end{pmatrix} = 0.$

因 $a\neq 0$,由上面方程可解出 γ'. 于是 $\Sigma^{1,1}$由(i)与(iii)中的方程所确定. 进而可得出 $\Sigma^{1,1}$为 $J_{2,2}^{2,0}$中余维为 2 的子流形.

命题的第二部分的证明简单,留给读者.

令 $\Sigma^{1,0} = \widetilde{\Sigma}^1 - \Sigma^{1,1}$,则它是 $J_{2,2}^{2,0}$中余维数为 1 的子流形.

7.3.2 折叠与尖点的通有性

命题 7.3.2 设 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为 C^∞映射,$x_0\in\mathbb{R}^2$,则

(i) $j_0^2F(x_0)\in\Sigma^{1,0}$当且仅当 F 在点x_0 处的芽是折叠,

(ii) $j_0^2F(x_0)\in\Sigma^{1,1}$且 j_0^2F 与$\Sigma^{1,1}$在点 x_0 处横截当且仅当 F 在点 x_0 处的芽为尖点.

证 $\Rightarrow$不妨假定 $x_0 = 0, F(x_0) = 0$. 因为 $\widetilde{\Sigma}^1 = \Sigma^{1,0}\cup\Sigma^{1,1}$,不论是情形(i)或(ii),均有 $j_0^2F(0)\in\widetilde{\Sigma}^1$,因此 F 在 $0\in\mathbb{R}^2$ 的秩为 1. 据引理 7.1.1,F 左右等价于

$$\begin{cases} u = x, \\ v = f(x, y), \end{cases}$$

其中 $f(0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=0$. 为简单起见,仍将它记为 F. 命题 7.3.1 告诉我们,$\Sigma^{1,0}$ 与 $\Sigma^{1,1}$ 在群 $\mathscr{A}$ 作用下不变,因此本命题中有关 j_0^2F 的条件不需作任何变动.

现设 $j_0^2F(0)=(A, B)$,其中 A 和 B 如(1)式所述,那么

$$a = 1,\ b = 0,\ a' = \frac{\partial f}{\partial x}(0),\ b' = \frac{\partial f}{\partial y}(0),$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,\ \alpha' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0),\ \beta' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0),$$

$$\gamma' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0).$$

下面分为两种情形讨论:

(1) $j_0^2F(0)\in\Sigma^{1,0}$,则命题 7.3.1 证明中的(i)成立,(iii)不成立,因而

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0,$$

由定义 7.2.1 知,F 在原点的芽是一折叠.

(2) $j_0^2F(0)\in\Sigma^{1,1}$ 且 j_0^2F 与 $\Sigma^{1,1}$ 在点 0 处横截. 由条件 $j_0^2F(0)\in\Sigma^{1,1}$ 知,命题 7.3.1 证明中的(i)与(iii)均成立,因此

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0.$$

而 j_0^2F 与 $\Sigma^{1,1}$ 在点 0 横截说明函数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 在点 $0\in\mathbb{R}^2$ 是独立的,即它们在点 0 的微分 $\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ 和 $\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ 是线性独立的,因而

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) \neq 0,$$

依定义 7.2.2,F 在原点的芽是尖点.

$\Leftarrow$显然.

定理 7.3.1 一般情形下,平面到平面的光滑映射的奇点是折叠或尖点.

证 据定理 2.4.4 及其注,下列性质对于 $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 而言是通有的:映射 $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 使得它的 2-导网 $j_0^2 F:\mathbb{R}^2 \to J_{2,2}^{2,0}$ 横截子流形 $\widetilde{\Sigma}^0$,$\Sigma^{1,0}$,$\Sigma^{1,1}$ 和 $\widetilde{\Sigma}^2$.

而 $\widetilde{\Sigma}^0$ 对应于 F 的正常点全体,又 $\mathrm{Codim}\widetilde{\Sigma}^2 = 4 > 2$,因此命题 7.3.2 证明了 F 的奇点只能是折叠和尖点.

第八章 光滑映射的局部研究:切空间

§8.1 问题的提出

在第七章中,我们研究了平面到平面的光滑映射.在一般状况下,它在每一点处的芽为下列3种类型中之一:正常点、折叠或尖点.这意思是说在 $C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ 中存在一个剩余集,使得每一个属于该剩余集的映射 $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 在任意点 $x\in\mathbb{R}^2$ 处的芽,按左右等价关系分类,等价于上面3种类型中的一种.

现考虑一般情形.设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射芽,这里 n,p 为任意正整数.我们已在集 $\varepsilon^0(n,p)=\{f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽$\}$上引入了左右等价(即 $\mathscr{A}$-等价)关系(见定义7.1.1),那么将 $\varepsilon^0(n,p)$ 中的映射芽按 $\mathscr{A}$-等价分类的问题恰是对 $\varepsilon^0(n,p)$ 在群 $\mathscr{A}$ 作用下的轨道进行分类的问题.回忆 $p=1$ 这一特殊情形,在第三章中对于余维数不超过5的函数芽按右等价关系给出了完全分类,这里一个函数芽 $f\in\varepsilon_n$ 的余维数是用 f 的 Jacobi 理想 $J(f)$ 在 ε_n 中的余维数来定义的,并且 $J(f)$ 表示 f 的切空间.当 $J(f)$ 在 ε_n 中具有有限余维时,f 具有很好的性质.例如它是有限 $\mathscr{R}$-决定的,f 与它的某一个,譬如说 k 阶 Taylor 多项式右等价;又如 f 存在万有形变,因此对 f 作扰动产生的每一个形变都可由 f 的通用形变"诱导"出来.回顾这些事实给我们的启示是:函数芽 f 的切空间 $J(f)$ 的有关信息为我们研究函数芽 f 本身提供了重要信息.因此对一般的映射芽进行研究,有必要对映射芽 $f\in\varepsilon^0(n,p)$ 的切空间以及群 $\mathscr{A}$ 的轨道 $\mathscr{A}\cdot f$ 在 f 处的切空间予以讨论.而这正是本章着重考虑的内容.

研究光滑映射的奇点,基本的几何思想类似于函数情形,但两

者有重要的差别.例如对余维数很小的光滑映射芽进行分类,限制为具有最低余维数的映射芽即所谓稳定映射芽.对于函数芽来说,这一概念指的是非奇异芽,并且当考虑位势芽时为 Morse 芽.然而对一般的映射芽而言,存在许多种稳定芽,并且稳定映射芽的分类决非易事.

下面用开折的语言来叙述稳定芽的概念.$f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的一个 r-参数"开折"可想象为"芽"$(\mathbb{R}^r,0)\to(\varepsilon(n,p),f_0)$, $u\mapsto f_u$,由此自然引入 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to(\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto f_u(x)$以及 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,(0,0)),(u,x)\mapsto(u,f(u,x))$,于是引入下面正式的定义.

定义 8.1.1 设 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽.若 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得 $f(0,x)=f_0(x)$,则 f 叫做 f_0 的 r-参数形变,并且 f_0 的 r-参数开折指的是芽 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,(0,0,))$,它由 $F(u,x)=(u,f(u,x))$给定.

显然,$\pi\circ F=\pi$,其中 $\pi:\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^r$,及 $\pi:\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^r$ 均为标准投影.

比较上述两个概念,f_0 的开折是将 f_0 的形变$\{f_u\}$按 u-水平"分开".

定义 8.1.2 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的两个 r-参数开折 $F_1,F_2:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0))\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,(0,0))$称为 $\mathscr{A}$-同构的,如果存在$(\mathbb{R}^n,0)$及$(\mathbb{R}^p,0)$上的恒同映射芽的 r-参数开折 Φ 与 Ψ,使得下列图表可换:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0)) & \xrightarrow{F_1} & (\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,(0,0))\\ \Phi\downarrow & & \downarrow\Psi\\ (\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,(0,0)) & \xrightarrow[F_2]{} & (\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,(0,0))\end{array}$$

易见,Φ 与 Ψ 为可逆芽且 $\Phi\in L_{n,r}$,$\Psi\in L_{p,r}$.

定义 8.1.3 (i) $f\in\varepsilon^0(n,p)$的 r-参数开折 F 叫做 $\mathscr{A}$-平凡的,如果它 $\mathscr{A}$- 同构于 f 的 r-参数常值开折$(u,x)\mapsto(u,f(x))$.

(ii) $f\in\varepsilon^0(n,p)$叫做 $\mathscr{A}$-稳定的,若它的每一个开折是 $\mathscr{A}$-平凡的.

在 $\varepsilon^0(n,p)$上除了左右等价以及与之相联系的右等价、左等价这些等价关系外,还有一种值得研究的等价关系,叫做接触等价.因此本章的安排如下:§8.2 讨论对应于群 $\mathscr{A}$作用的切空间与轨道切空间.由于群 $\mathscr{A}$为群 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$的直积,顺便还得到了相应于群 $\mathscr{R}$和 $\mathscr{L}$的切空间与轨道切空间. §8.4 在 $\varepsilon^0(n,p)$上引入一种新的等价关系,称为接触等价或 $\mathscr{K}$-等价.$\mathscr{K}$-等价粗于 $\mathscr{A}$-等价,但便于计算.对于稳定映射芽来说,按 $\mathscr{A}$-等价分类与按 $\mathscr{K}$-等价分类是一致的.因此在§8.4 中介绍 $\mathscr{K}$-等价的特征,讨论对应于群 $\mathscr{K}$ 的切空间与轨道切空间,顺便对 $\mathscr{K}$ 的正规子群 $\mathscr{C}$ 作相应的介绍. §8.3 通过举例说明如何计算群 $\mathscr{A}$ 作用下的切空间. §8.5 讨论了映射芽的 $\mathscr{K}$-余维数的计算.

§8.2 对应于群 $\mathscr{A}$的切空间

类似于有限维流形,在映射芽空间 $\varepsilon(n,p)$中考察在 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$处的切空间,把它看成是在 f_0 处的全体“切向量”组成的空间.而将 f_0 处的切向量理解为 $\varepsilon(n,p)$中过 f_0 的光滑道路的等价类,并且过 f_0 的光滑道路指的是 f_0 的 1-参数开折 F: $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$,它可表示为

$$F(t,x)=(t,f(t,x)),\tag{1}$$

其中 $t\in(\mathbb{R},0)$,$x\in(\mathbb{R}^n,0)$.令 $f_t(x)=f(t,x)$,则 $f_0(x)=f(0,x)$.并且很自然地,把$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$看作是在 f_0 处的一个切向量.因为 F 具有形式(1),所以又叫做$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽.

8.2.1 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽的平凡性判别法

依照 1-参数开折是 $\mathscr{A}$-平凡的定义,可写出下列的

定义 8.2.1 一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$叫做 $\mathscr{A}$-平凡的,如果存在$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$及$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$上的$\mathbb{R}$-水平保持的微分同胚芽 Φ 和 Ψ,使得

$$\Psi^{-1}\circ F\circ\Phi = 1_{(\mathbb{R},0)}\times f,$$

其中 $1_{(\mathbb{R},0)}$ 为$(\mathbb{R},0)$上的恒同映射芽,$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽.

命题 8.2.1 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$是 $\mathscr{A}$-平凡的,当且仅当存在两个 C^∞ 向量场芽 X 和 Y,它们分别定义在$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$和$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$上,且具有下列形式:

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},\ t\in(\mathbb{R},0),\ x\in(\mathbb{R}^n,0),$$

$$Y=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}Y_j(t,y)\frac{\partial}{\partial y_j},\ (t,y)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0),$$

使得

$$\mathrm{D}F\cdot X = Y\circ F. \tag{2}$$

证 充分性.积分向量场 X 和 Y 分别得到$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$及$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$上的$\mathbb{R}$-水平保持的微分同胚芽$\Phi(t,x)=(t,\phi(t,x))$与 $\Psi(t,y)=(t,\psi(t,y))$,它们分别是$(\mathbb{R}^n,0)$和$(\mathbb{R}^p,0)$上的恒同映射芽的单参数开折.Φ 将一族水平直线(即$\frac{\partial}{\partial t}$的一族积分曲线)变换为向量场 X 的一族积分曲线.对 Ψ 和 Y 也有类似的描述.而方程(2)是说 F 将向量场X 的经过点(t,x)的积分曲线变为向量场 Y 的经过点$F(t,x)$的积分曲线(见图 8.1).

令 $G=\Psi^{-1}\circ F\circ\Phi$,则 G 将$\frac{\partial}{\partial t}$的积分曲线变换为$\frac{\partial}{\partial t}$的积分曲线,即

$$DG \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \circ G.$$

若记 $G(t,x)=(t,g(t,x))$,上式说明$\frac{\partial g}{\partial t}=0$,因此 G 是 1-参数常值开折,F 是 $\mathscr{A}$-平凡的.

必要性留作练习.

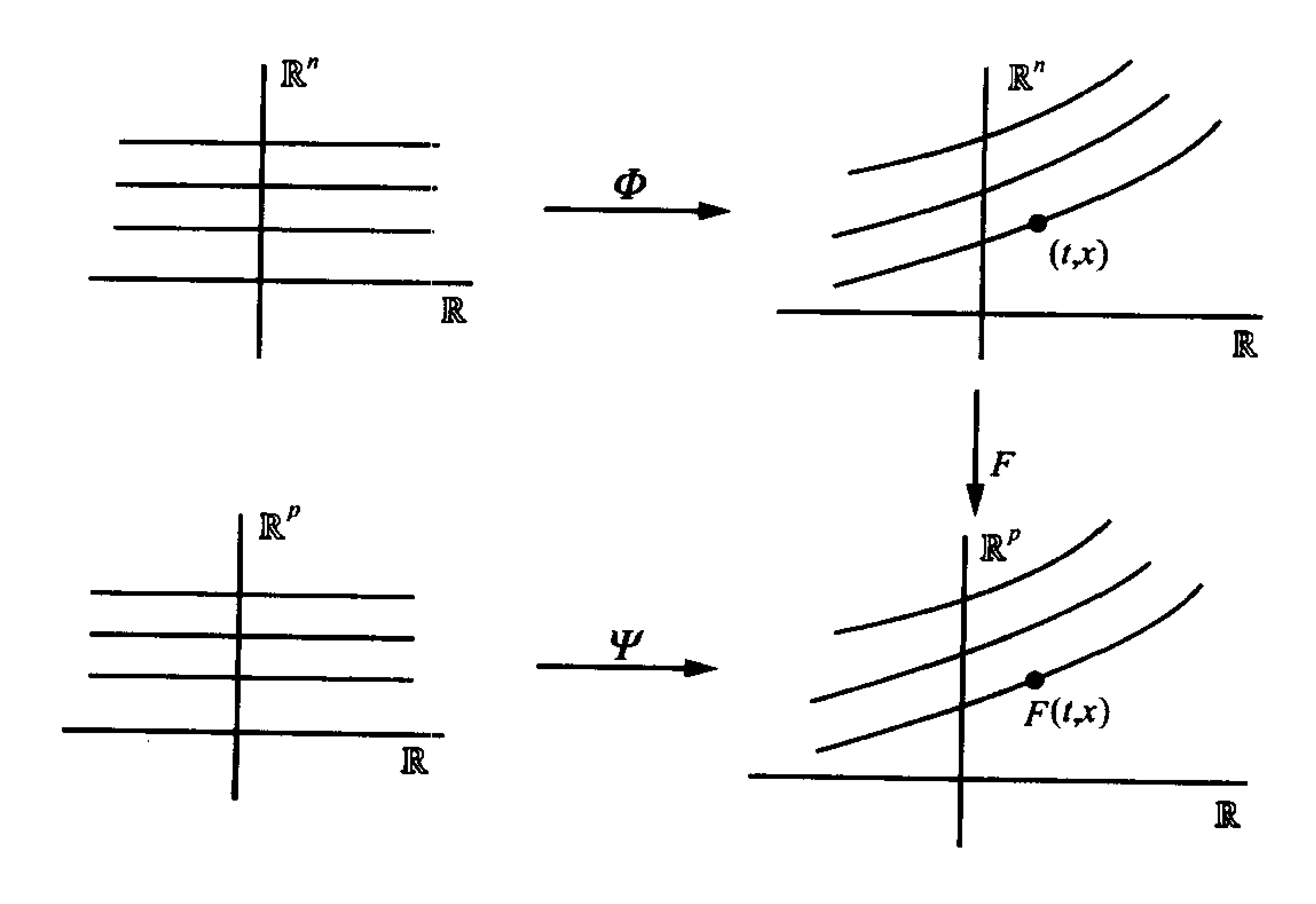


图 8.1

8.2.2 切空间和轨道切空间

分析平凡性条件(2),我们将给出切空间的定义.令

$$F(t,x) = (t,f(t,x)),\ f_t(x) = f(t,x),$$

$$X_t(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$Y_t(y) = \sum_{j=1}^{p} Y_j(t,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

条件(2)可写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} & \mathrm{D}f_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ X_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ Y_t \circ f_t \end{pmatrix},$$

其中 $\mathrm{D}f_t(x)$表示 f_t 关于 x 的 Jacobi 矩阵,即

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{D}f_t \cdot X_t = Y_t \circ f_t,$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{D}f_t \cdot X_t + Y_t \circ f_t. \tag{3}$$

当 $t \neq 0$ 时,f_t, X_t, Y_t 及 $\partial f/\partial t$ 不能看作是映射芽或向量场芽. 但当 $t=0$ 时,等式(3)给出

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = -\mathrm{D}f_0 \cdot X_0 + Y_0 \circ f_0, \tag{4}$$

此时 X_0, Y_0 分别是$(\mathbb{R}^n, 0)$与$(\mathbb{R}^p, 0)$上的向量场芽,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}$视为 $\varepsilon(n,p)$中在 f_0 处的一个切向量.

将$\mathbb{R}^n$ 上的向量场在点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处的芽所成的空间记为 $V(\mathbb{R}^n)$,$\mathbb{R}^p$ 上的向量场在点 $0 \in \mathbb{R}^p$ 处的芽组成的空间记为 $V(\mathbb{R}^p)$,(4)式启示我们给出切空间的下列定义.

定义 8.2.2 设 $f:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽. 集

$$T_e\mathscr{A}(f) = \{\mathrm{D}f \cdot X + Y \circ f \mid X \in V(\mathbb{R}^n),\ Y \in V(\mathbb{R}^p)\}$$

定义为在群 $\mathscr{A}$ 作用下于 f 处的切空间.

对于$\mathbb{R}^n$ 上保原点的局部微分同胚,对应的向量场在原点的值必为零向量,因此代替 $V(\mathbb{R}^n)$考虑 $\mathscr{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)$. 设

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathscr{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n),$$

因而 $X_i \in \mathscr{M}_n (i=1,\cdots,n)$. 利用 $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X$,通过积分可得到单参数局部微分同胚群 $\{\phi_t:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)\}$ 满足 $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t\Big|_{t=0} = X$(根据定理 1.3.2). 类似地,假定

$$Y = \sum_{j=1}^{p} Y_j(y)\frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathscr{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p),$$

相应地有单参数局部微分同胚群 $\{\psi_t:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)\}$,从而 $\{(\phi_t,\psi_t)\}$ 是 $\mathscr{A}$ 中的单参数子群. 令 $f_t = \psi_t \circ f_0 \circ \phi_t^{-1}$,其中 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$,则可想象 $t \mapsto f_t \in \varepsilon^0(n,p)$ 为位于轨道 $\mathscr{A}\cdot f_0 \subset \varepsilon^0(n,p)$ 中的一条 C^∞ 道路,该道路经过 f_0. 可以证明

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\Big|_{t=0} = -\mathrm{D}f_0(x)\cdot X(x) + Y(f_0(x))$$

(留给读者补述),它对应于道路 $\{f_t\}(t\in(\mathbb{R},0))$ 在 f_0 处的切向量.

定义 8.2.3 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,轨道 $\mathscr{A}\cdot f$ 在 f 处的切空间 $T\mathscr{A}(f)$ 定义为

$$T\mathscr{A}(f) = \{\mathrm{D}f\cdot X + Y\circ f \mid X \in \mathscr{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n), Y \in \mathscr{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)\}.$$

例 1 计算稳定映射芽 $f\in\varepsilon^0(n,p)$ 的切空间.

任取 $g\in\varepsilon(n,p)$. 过 f 的光滑道路芽由 $\mathbb{R}$-水平保持的 C^∞ 映射芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$ 给出,这里 $F(t,x) = (t,f_t(x))$, $f_t(x)=f(x)+tg(x)$. 显然

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = g.$$

因 f 是稳定的,F 作为 f 的 1-参数开折是 $\mathscr{A}$-平凡的,故 $g\in T_e\mathscr{A}(f)$. 由于 $g\in\varepsilon(n,p)$ 是任取的,所以 $T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p)$.

本例给出一个映射芽 $f\in\varepsilon^0(n,p)$ 为稳定芽的必要条件:

$T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p)$.

定义 8.2.4 若 $f\in\varepsilon^0(n,p)$满足条件 $T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p)$，则 f 叫做无穷小稳定芽.

下一章将证明无穷小稳定芽必为稳定芽，因此无穷小稳定性$\Longleftrightarrow$稳定性.更一般地，我们有下述

定义 8.2.5 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$.说 f 是一个具有有限 $\mathscr{A}$-余维的映射芽，如果商空间

$$\varepsilon(n,p)/T_e\mathscr{A}(f)$$

是一个有限维实向量空间.在这种情形下，将商空间 $\varepsilon(n,p)/T_e\mathscr{A}(f)$ 的维数定义为 f 的 $\mathscr{A}$-余维数，记为 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{A})$，即

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{A}) = \dim_{\mathbb{R}}\varepsilon(n,p)/T_e\mathscr{A}(f).$$

由例 1 知，稳定芽的 $\mathscr{A}$-余维数为 0.

8.2.3 切空间的代数描述

设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽.若 C^∞ 映射芽 $\sigma:(\mathbb{R}^n,0)\to T(\mathbb{R}^p)$满足条件 $\pi_p\circ\sigma=f$，其中 $\pi_p:T(\mathbb{R}^p)=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ 为自然投影，则称 σ 为沿 f 的向量场芽.

沿 f 的向量场芽所成之集记为 $V(f)$，它是一个秩为 p 的自由 ε_n-模.事实上，设$\{y_1,\cdots,y_p\}$为$(\mathbb{R}^p,0)$的局部坐标系，则沿 f 的向量场芽$\frac{\partial}{\partial y_1}\circ f,\cdots,\frac{\partial}{\partial y_p}\circ f$ 组成$V(f)$的一组自由基.借助于这组基，将 $V(f)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$.

特别，若 f 为$(\mathbb{R}^n,0)$上的恒同映射芽，则 $V(f)$就是前面所说的 $V(\mathbb{R}^n)$，它是一个秩为 n 的自由 ε_n-模.借助于 $V(\mathbb{R}^n)$的自由基$\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$，$V(\mathbb{R}^n)$等同于 $\varepsilon_n^{\times n}$.如果 f 为$(\mathbb{R}^p,0)$上的恒同映射芽，此时的 $V(f)$就是 $V(\mathbb{R}^p)$，它是秩为 p 的自由ε_p-模.借助于 $V(\mathbb{R}^p)$的自由基$\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_p}$，$V(\mathbb{R}^p)$等同于 $\varepsilon_p^{\times p}$.

与上述模相联系的有两个重要同态.

定义 8.2.6 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞ 映射芽.

(i) $tf: V(\mathbb{R}^n)\to V(f)$定义为 $tf(X)(x)=\mathrm{D}f(x)(X(x))$, $X\in V(\mathbb{R}^n)$, $x\in(\mathbb{R}^n,0)$. 它是两个自由 ε_n-模之间的线性映射,其矩阵为 f 的 Jacobi 矩阵.

(ii) $wf: V(\mathbb{R}^p)\to V(f)$定义为 $wf(Y)(x)=Y\circ f(x)$, $Y\in V(\mathbb{R}^p)$, $x\in(\mathbb{R}^n,0)$. 这是关于 f^* 的同态.

注 设 A 是一个 R-模, B 是一个 S-模, $\phi:R\to S$ 为环同态. 我们说 $\Phi:A\to B$ 是一个关于 ϕ 的同态,如果对所有 $\alpha,\beta\in R$, $a,b\in A$, 有 $\Phi(\alpha a+\beta b)=\phi(\alpha)\Phi(a)+\phi(\beta)\cdot\Phi(b)$.

利用上面定义的同态,我们将 $f\in\varepsilon^0(n,p)$的切空间与轨道切空间分别写为

$$T_e\mathscr{A}(f)=tf(V(\mathbb{R}^n))+wf(V(\mathbb{R}^p))$$

和

$$T\mathscr{A}(f)=tf(\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathscr{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p)).$$

上面二等式右边和式中的第一项为 ε_n-模,对应于群 $\mathscr{R}$ 的作用,第二项则为 $f^*\varepsilon_p$-模,或说借助于环同态 $f^*:\varepsilon_p\to\varepsilon_n$, 视为 ε_p-模,显然它对应于群 $\mathscr{L}$ 的作用. 因此自然地定义

$$T_e\mathscr{R}(f)=tf(V(\mathbb{R}^n)),\quad T\mathscr{R}(f)=tf(\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n)),$$

它们分别叫做对应于群 $\mathscr{R}$ 的作用在 f 处的切空间及轨道 $\mathscr{R}\cdot f$ 在 f 处的切空间. 又令

$$T_e\mathscr{L}(f)=wf(V(\mathbb{R}^p)),\ T\mathscr{L}(f)=wf(\mathscr{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p)),$$

它们分别叫做对应于群 $\mathscr{L}$ 的作用在 f 处的切空间及轨道 $\mathscr{L}\cdot f$ 在 f 处的切空间. 又

$$T_e\mathscr{A}(f)=T_e\mathscr{R}(f)+T_e\mathscr{L}(f),$$

$$T\mathscr{A}(f)=T\mathscr{R}(f)+T\mathscr{L}(f).$$

现在回到切空间 $T_e\mathscr{A}(f)\subset V(f)$的定义,这里 $f\in\varepsilon^0(n,p)$. 设 $e_1,\cdots,e_p$ 为向量空间$\mathbb{R}^p$ 的标准基,将这些向量视为常值映射芽,看作 $\varepsilon(n,p)$中的元素,因而它们组成 ε_n-模$\varepsilon(n,p)=\varepsilon_n^{\times p}$的生成元组,

$$\varepsilon(n,p)=\varepsilon_n\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

类似地,有

$$\varepsilon^0(n,p)=\mathscr{M}_n\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)\in V(\mathbb{R}^n)$, $X_i\in\varepsilon_n(i=1,\cdots,n)$,则

$$\mathrm{D}f\cdot X=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

又设 $Y=(Y_1,\cdots,Y_p)\in V(\mathbb{R}^p)$, $Y_j\in\varepsilon_p(j=1,\cdots,p)$,则有

$$Y\circ f=\sum_{j=1}^{p}(Y_j\circ f)\cdot e_j,$$

从而

$$T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+f^*(\varepsilon_p)\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

将 $f^*(\varepsilon_p)\{e_1,\cdots,e_p\}$简记为 $\varepsilon_p\{e_1,\cdots,e_p\}$,于是

$$T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+\varepsilon_p\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

类似地,有

$$T\mathscr{A}(f)=\mathscr{M}_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+\mathscr{M}_p\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

显然 $T_e\mathscr{R}(f)=\varepsilon_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$与 $T\mathscr{R}(f)=\mathscr{M}_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$均为有限生成的$\varepsilon_n$-模,但是 $T_e\mathscr{A}(f)$与 $T\mathscr{A}(f)$是 ε_n-模与ε_p-模之

和，研究中常常需要考虑它们作为 ε_p-模是否有限生成，为此应用 Malgrange 预备定理作为研究工具.

注 ε_n-模 $\varepsilon_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ 叫做 f 的 Jacobi 模，有时记为 $J(f)$，它是函数芽的 Jacobi 理想的推广.

定义 8.2.7 $f\in\varepsilon^0(n,p)$ 叫做有限奇点型(finite singularity type)的映射芽，若商空间 $V(f)/T_e\mathscr{A}(f)$ 作为 ε_p-模(借助于环同态 f^*)是有限生成的.

这意指存在有限个 $\sigma_1,\cdots,\sigma_q\in V(f)$，使得

$$T_e\mathscr{A}(f)+\varepsilon_p\{\sigma_1,\cdots,\sigma_q\}=V(f).$$

显然，具有有限 $\mathscr{A}$-余维的映射芽是有限奇点型的(或简称为有限型的). 但反过来不真，见 §8.3 中例.

8.2.4 在导网空间中的轨道切空间

设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射芽. 对任意整数 $r\geqslant 1$，f 取 r-导网得 j^rf，它可表示为 f 的 r 阶 Taylor 多项式映射. 显然 $j^rf\in\varepsilon(n,p)/\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p)=J_{n,p}^r$，其中 $\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p)$ 是 ε_n-子模，它由 r-平坦的映射芽组成(即这样的映射芽的每一分量均属于 $\mathscr{M}_n^{r+1}$). 令 $j^r:\varepsilon(n,p)\to J_{n,p}^r$ 为标准投影，则 $j^r(\varepsilon^0(n,p))=\mathscr{M}_n\varepsilon(n,p)/\mathscr{M}_n^{r+1}\varepsilon(n,p)=J_{n,p}^{r,0}$，它等同于从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^p$ 的次数不大于 r 且常数项为 0 的多项式映射所组成的向量空间，因而是一个有限维 C^∞ 流形.

假定 $f\in\varepsilon^0(n,p)$，则过 f 的轨道 $\mathscr{A}\cdot f\subset\varepsilon^0(n,p)$. 利用 §1.3中使用的记号，则 $\mathscr{A}=L_n\times L_p$，且对任意 $r\geqslant 1$，L_n^r 及 L_p^r 均为 Lie 群(据命题 1.3.1)，分别记为 $\mathscr{R}^r$ 和 $\mathscr{L}^r r$，因而 $\mathscr{A}^r=\mathscr{R}^r\times\mathscr{L}^r$ 也是 Lie 群.

因为对群 $\mathscr{A}$ 中的任意(ϕ,ψ)，有

$$\psi\circ(\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p))\circ\phi^{-1}=\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p),\ r\geqslant 1,$$

所以群 $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用 $\mathscr{A}\times\varepsilon^0(n,p)\to\varepsilon^0(n,p)$ 诱导出

Lie 群$\mathscr{A}^r$在C^∞流形$J^{r,0}_{n,p}$上的商作用$\mathscr{A}^r\times J^{r,0}_{n,p}\to J^{r,0}_{n,p}$,从而轨道$\mathscr{A}\cdot f$在$j^r$下的像

$$j^r(\mathscr{A}\cdot f)=\mathscr{A}^r\cdot j^rf$$

是$J^{r,0}_{n,p}$中的一条经过j^rf的$\mathscr{A}^r$-轨道,它是$J^{r,0}_{n,p}$中的子流形.

命题 8.2.2 设$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$,则对任意的整数$r\geqslant1$,轨道$\mathscr{A}^r\cdot j^rf_0$在$j^rf_0$处的切空间$T\mathscr{A}^r\cdot j^rf_0$是$J^r_{n,p}$的子空间$j^r(T\mathscr{A}(f_0))$,即

$$T\mathscr{A}^r\cdot j^rf_0=j^r(T\mathscr{A}(f_0)).$$

证 设$\{(\phi_t,\psi_t)\in\mathscr{A}\mid t\in(\mathbb{R},0)\}$为$\mathscr{A}$中的单参数子群,令

$$f_t=\psi_t\circ f_0\circ\phi_t^{-1},$$

则$t\mapsto f_t$是位于轨道$\mathscr{A}\cdot f_0\subset\varepsilon^0(n,p)$中的一条$C^\infty$道路,该道路经过$f_0$.如前所述,$\frac{\partial f_t}{\partial t}\big|_{t=0}\in T\mathscr{A}(f_0)$,又

$$j^r\left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(j^rf_t)\bigg|_{t=0}. \tag{5}$$

因$f_t\in\mathscr{A}\cdot f_0$,故$j^rf_t\in j^r(\mathscr{A}\cdot f_0)=\mathscr{A}^r\cdot j^rf_0$,并且

$$\frac{\partial}{\partial t}(j^rf_t)\bigg|_{t=0}\in T\mathscr{A}^r\cdot j^rf_0,$$

所以由等式(5)可推得本命题成立.

§8.3 切空间计算举例

例 1 设$f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$, $x\mapsto(x^2,0)$,这里$n=1,p=2$.我们有$f^*\mathscr{M}_p=\mathscr{M}_n^2$,据 Malgrange 预备定理,

$$\varepsilon_n=\varepsilon_p\{1,x\}, \tag{1}$$

这说明 ε_n 作为 ε_p-模是有限生成的，生成元为 1 和 x，因此

$$\varepsilon(n,p)=\varepsilon_n\oplus\varepsilon_n=\varepsilon_p\{e_1,e_2,g_1,g_2\},\tag{2}$$

其中 $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, g_1=\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}, g_2=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix}$. 显然 $e_1,e_2\in T_e\mathscr{A}(f)$，$g_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2x\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\mathrm{D}f\in J(f)$，但是 $g_2\notin T_e\mathscr{A}(f)$，因此

$$T_e\mathscr{A}(f)+\varepsilon_p\cdot g_2=\varepsilon(n,p),\tag{3}$$

据定义 8.2.7，f 是有限型的. 但 f 不是有限 $\mathscr{A}$-余维的映射芽. 可以验证，若 $(\xi_1,\xi_2)\in\varepsilon_n\oplus\varepsilon_n$，则 $(\xi_1,\xi_2)\in T_e\mathscr{A}(f)$ 的充要条件是 ξ_2 为 x 的偶函数(留作练习).

例 2 设 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$，$x\mapsto(x^2,x^3)$. 同上例一样，$f^*\mathscr{M}_p=\mathscr{M}_n^2$，因此上例中的(1)～(3)式均成立. 然而有

$$\mathscr{M}_p\cdot g_2\subset T_e\mathscr{A}(f),\tag{4}$$

事实上，$\mathscr{M}_p$ 由靶空间 $\mathbb{R}^2$ 的坐标函数 y_1,y_2 生成，$\mathscr{M}_p\cdot g_2$ 作为 ε_p-模由 $f^*y_1\cdot g_2$ 和 $f^*y_2\cdot g_2$ 生成，即

$$\mathscr{M}_p\cdot g_2=\varepsilon_p\{h_1,h_2\},$$

其中

$$h_1=f^*y_1\cdot g_2=x^2\cdot g_2=\begin{bmatrix}0\\x^3\end{bmatrix}=f^*y_2\cdot e_2,$$

$$h_2=f^*y_2\cdot g_2=x^3\cdot g_2=\begin{bmatrix}0\\x^4\end{bmatrix}=(f^*y_1)^2\cdot e_2.$$

由(3)和(4)式，得到

$$T_e\mathscr{A}(f)+\mathbb{R}\cdot g_2=\varepsilon(n,p),$$

并且容易验证 $g_2\notin T_e\mathscr{A}(f)$.

由此可见，f 是一个具有有限 $\mathscr{A}$-余维的映射芽，并且 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{A})=1$.

例 3 考虑折叠手帕(folded handkerchief)映射芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$，它定义为 $f(x,y)=(x^2,y^2)$. 这里 $n=p=2$.

$$f^*\mathscr{M}_p=\langle x^2,y^2\rangle_{\varepsilon_n}\supset\mathscr{M}_n^3,$$

这里$\langle x^2,y^2\rangle_{\varepsilon_n}$ 表示 ε_n 中由 x^2,y^2 生成的理想. 由 Malgrange 预备定理，有

$$\varepsilon_n=\varepsilon_p\{1,x,y,xy\}. \tag{1'}$$

$\varepsilon(n,p)=\varepsilon_n\oplus\varepsilon_n$ 作为 ε_p-模是有限生成的，它有 8 个生成元：$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}xy\\0\end{bmatrix}$及$\begin{bmatrix}0\\xy\end{bmatrix}$. 又

$$\mathrm{D}f=\begin{bmatrix}2x&0\\0&2y\end{bmatrix},$$

因此 f 的 Jacobi 模 $J(f)=\varepsilon_n\left\{\begin{bmatrix}2x\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2y\end{bmatrix}\right\}$. 这一事实连同(1′)式便可以证明

$$T_e\mathscr{A}(f)+\varepsilon_p\{h_1,h_2\}=\varepsilon(n,p),$$

其中 $h_1=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},h_2=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$不属于 $T_e\mathscr{A}(f)$，因此 f 是有限奇点型的，但 f 不具有有限 $\mathscr{A}$-余维.

事实上，设$(\xi_1,\xi_2)\in\varepsilon(n,p)$，那么$(\xi_1,\xi_2)\in T_e\mathscr{A}(f)$是指存在 $\eta,\zeta\in\varepsilon_n$ 及 $Y_1,Y_2\in\varepsilon_p$，使得

$$x\cdot\eta+f^*Y_1=\xi_1,\qquad y\cdot\zeta+f^*Y_2=\xi_2.$$

第一个方程有解 η 和 Y_1 当且仅当存在 $Y_1\in\varepsilon_p$，使得对于 $x=0$，

$$\xi_1-f^*Y_1=0,$$

即

$$\xi_1(0,y) = Y_1(0,y^2),$$

因此 $\xi_1(0,y)$是 y 的偶函数. 类似地可以证明第二个方程有解 ζ 和 Y_2 的充要条件是 $\xi_2(x,0)$是 x 的偶函数. 于是 f 的 $\mathscr{A}$-余维数是无限的.

例 4 设 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2+y^3,y^2+x^3)$, 它可以看作对例 3 的映射作扰动而得到的.

$$f^*\mathscr{M}_p = \langle x^2+y^3, y^2+x^3\rangle_{\varepsilon_n} = \langle x^2,y^2\rangle_{\varepsilon_n},$$

$$\mathrm{D}f = \begin{pmatrix} 2x & 3y^2 \\ 3x^2 & 2y \end{pmatrix},$$

f 的 Jacobi 模

$$J(f) = \varepsilon_n\left\{\begin{pmatrix} 2x \\ 3x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3y^2 \\ 2y \end{pmatrix}\right\}.$$

如例 3 所述,

$$\varepsilon_n = \varepsilon_p\{1,x,y,xy\},\ \varepsilon(n,p) = \varepsilon_n \oplus \varepsilon_n,$$

并且

$$T_e\mathscr{A}(f) + \varepsilon_p\{h_1,h_2\} = \varepsilon(n,p),$$

其中 $h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$不属于 $T_e\mathscr{A}(f)$. 下面证明

$$\mathscr{M}_p \cdot \{h_1,h_2\} \subset T_e\mathscr{A}(f). \tag{1}$$

因 ε_p-模 $\mathscr{M}_p\cdot\{h_1,h_2\}$由 $f^*y_i\cdot h_j$ 生成$(i,j=1,2)$,其中 y_1,y_2 为靶空间$\mathbb{R}^2$ 的坐标函数. 欲证(1)式成立, 只需证明这些生成元 $f^*y_i\cdot h_j$属于 $T_e\mathscr{A}(f)$, 例如考虑 $f^*y_1\cdot h_1$, 其他情形的证明类似.

$$f^* y_1 \cdot h_1 = (x^2 + y^3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x(x^2 + y^3) \end{pmatrix},$$

我们必须解下列方程组

$$\begin{cases} 2x \cdot \xi + 3y^2 \cdot \eta + f^* Y_1 = 0, \\ 3x^2 \cdot \xi + 2y \cdot \eta + f^* Y_2 = x(x^2 + y^3), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\xi, \eta \in \varepsilon_n$, $Y_1, Y_2 \in \varepsilon_p$. 方程组(2)等价于下列方程组

$$\begin{cases} x(4 - 9xy)\xi = -2f^* Y_1 - 3y[x(x^2 + y^3) - f^* Y_2], \\ y(4 - 9xy)\eta = 2[x(x^2 + y^3) - f^* Y_2] + 3xf^* Y_1. \end{cases} \tag{3}$$

因芽 $4-9xy$ 在 ε_n 中是可逆的，为解方程组(3)，只需求 Y_1 和 Y_2，使得上述方程组的右边分别属于由 x 及 y 所生成的理想. 为此，对(3)式中第一个方程，令 $x=0$；而对第二个方程令 $y=0$，得

$$\begin{cases} -2Y_1(y^3, y^2) + 3yY_2(y^3, y^2) = 0, \\ 2x^3 - 2Y_2(x^2, x^3) + 3xY_1(x^2, x^3) = 0, \end{cases}$$

$Y_1 = -\frac{6}{5}y_1$, $Y_2 = -\frac{4}{5}y_2$ 为其解.

综合上面的分析，我们有

$$T_e\mathscr{A}(f) + \mathbb{R}\{h_1, h_2\} = \varepsilon(n, p),$$

因此 $\mathrm{Codim}(f, \mathscr{A}) = 2$.

§8.4 接触等价群与相应的切空间

设 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，取它们的代表并作

其图形,这两个图形都是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$的子流形.如何描述 graph$f$ 及 graph$g$ 与子空间$\mathbb{R}^n\times\{0\}$有相同的“接触”呢?直观的想法是在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$内引入一个保原点的$C^\infty$局部坐标变换$\phi$,要求$\phi$保持子空间$\mathbb{R}^n\times\{0\}$,并把 graph$f$ 映成 graph$g$.下面来建立接触等价概念.

8.4.1 接触等价

设$\phi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$为微分同胚芽,满足下列条件:存在映射芽$h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得下列图表可换:

$$\begin{array}{ccccc}(\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n,0)\\ h\downarrow & & \phi\downarrow & & h\downarrow\\ (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n,0)\end{array} \qquad (1)$$

其中$i:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$, $x\mapsto(x,0)$与$\pi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,$(x,y)\mapsto x$分别为包含映射芽和标准投射芽.不难看出$h$由$\phi$惟一确定并且$h$是$C^\infty$可逆芽.

将满足上述条件的所有ϕ组成的群记为$\mathscr{K}(n,p)$或简记为$\mathscr{K}$,取映射的复合作为群运算.由$\phi\circ i=i\circ h$知,ϕ保持子空间$\mathbb{R}^n\times\{0\}$.又由$\pi\circ\phi=h\circ\pi$知,ϕ将底空间$\mathbb{R}^n$中的点x处的纤维$\{x\}\times\mathbb{R}^p$映为点$h(x)$处的纤维$\{h(x)\}\times\mathbb{R}^p$,因此$\mathscr{K}$中的任意$\phi$可表为

$$\phi(x,y)=(h(x),\psi(x,y)), \qquad (2)$$

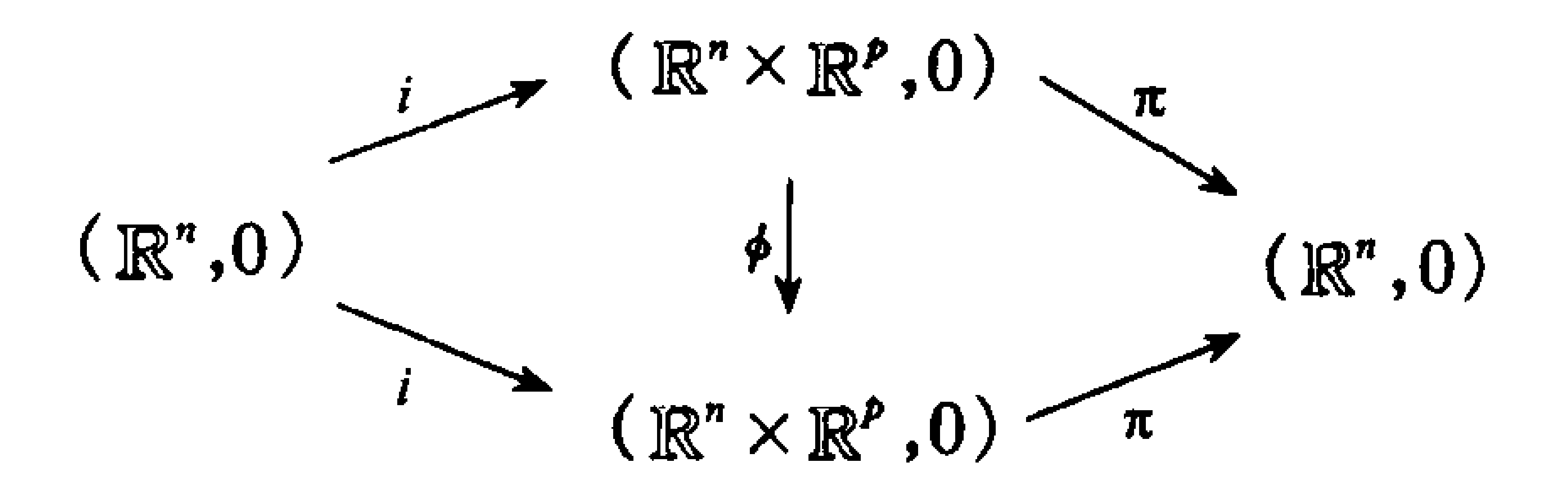
其中$\psi:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$C^\infty$映射芽,且

$$\psi(x,0)=0,\ x\in(\mathbb{R}^n,0). \qquad (3)$$

特别,考虑群$\mathscr{K}$中这样一些成员,它们在$\mathbb{R}^n\times\{0\}$上的限制为$(\mathbb{R}^n,0)$上的恒同映射芽.具有这一性质的所有$\phi\in\mathscr{K}$组成$\mathscr{K}$的子群,按照 Mather 使用的符号,记为$\mathscr{C}$,

$$\mathscr{C} = \{\phi \in \mathscr{K} \mid \phi \mid \mathbb{R}^n \times \{0\} = 1_{(\mathbb{R}^n,0)}\},$$

因此 $\mathscr{C}$ 中的 ϕ 将图表(1)简化为下列可换图表：



于是 $\mathscr{C}$ 中的任意 ϕ 可表为

$$\phi(x,y) = (x,\psi(x,y)),$$

其中 ψ 如(3)式中所述. 读者可以验证 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{K}$ 的正规子群.

现在定义群 $\mathscr{K}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用. 设 $\phi \in \mathscr{K}$, $f \in \varepsilon^0(n,p)$, 则 $\phi \cdot f \in \varepsilon^0(n,p)$ 依下列公式给出：

$$(1,\phi \cdot f) = \phi \circ (1,f) \circ h^{-1}, \tag{4}$$

其中 $1:(\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$ 为恒同映射芽, h 使图表(1)可换.

容易看出

$$\phi(\mathrm{graph} f) = \mathrm{graph}(\phi \cdot f). \tag{5}$$

若 $\phi(x,y) = (h(x),\psi(x,y))$, 且令 $g = \phi \cdot f$, 则由(4)式可得

$$g \circ h(x) = \psi(x,f(x)). \tag{6}$$

(4)～(6)式描述了群 $\mathscr{K}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用. (6)式说明集 $\{f = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ 经微分同胚 h 变换为集 $\{g = 0\} \subset \mathbb{R}^n$, 因此 graph$f$ 与 graph$g$ 同 $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ 有相同的接触. 不仅如此, (5)式说明 ϕ 将 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ 的 n 维子流形 graph$f$ 变换为另一子流形, 该子流形是 $g = \phi \cdot f$ 的图. 正因为这样, 把群 $\mathscr{K}$ 叫做接触等价群, $\mathscr{K} \cdot f$ 叫做 $\varepsilon^0(n,p)$ 中经过 f 的接触轨道或 $\mathscr{K}$-轨道. 属于同一 $\mathscr{K}$-轨道的二映射芽称为接触等价的或 $\mathscr{K}$-等价的.

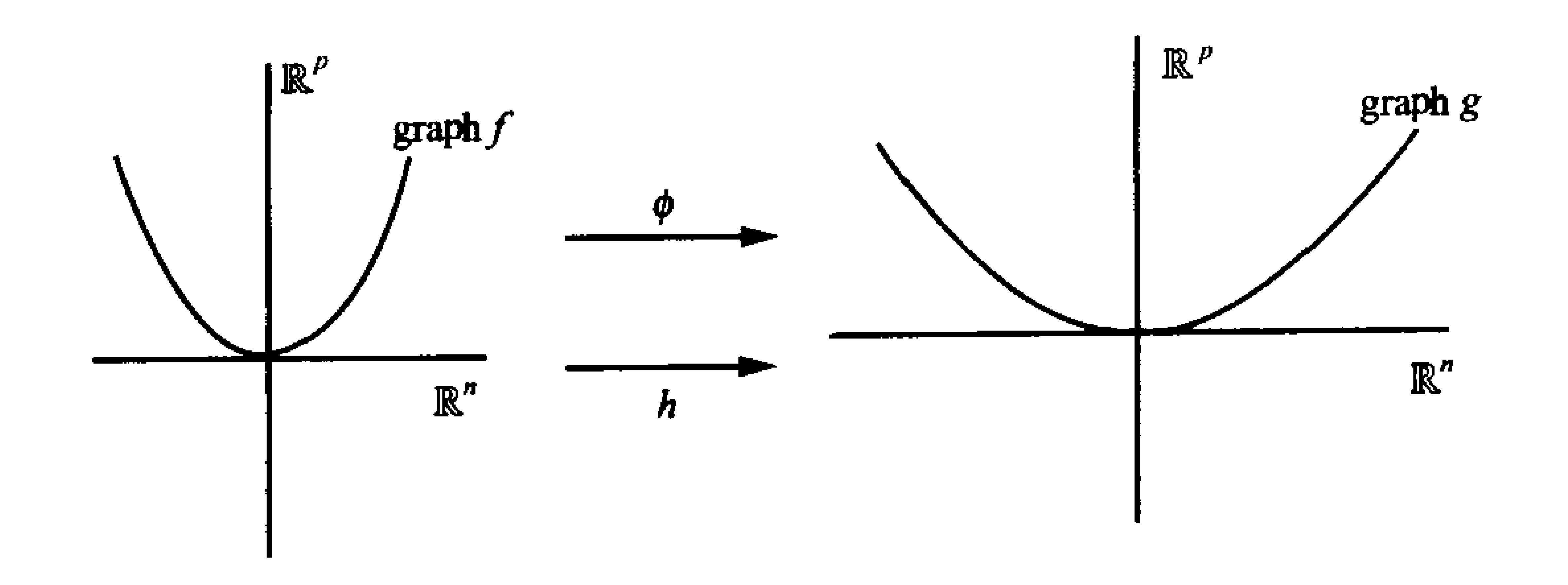


图 8.2

命题 8.4.1 二映射芽 $f,g\in\varepsilon^0(n,p)$属于同一条 $\mathcal{K}$-轨道当且仅当存在微分同胚芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得

$$h^*(g^*\mathcal{M}_p)=f^*\mathcal{M}_p.$$

注 ε_n 中理想$f^*\mathcal{M}_p$ 和$g^*\mathcal{M}_p$ 分别由f 的p 个分量$f_1,\cdots,f_p$ 及 g 的p 个分量$g_1,\cdots,g_p$ 所生成. 因 h 是可逆芽,$h^*:\varepsilon_n\to\varepsilon_n$ 为环同构. 命题条件说明理想 $f^*\mathcal{M}_p$ 和$g^*\mathcal{M}_p$ 是同构的.

证 $\Rightarrow$ 假设 $g=\phi\cdot f$,其中 $\phi:(x,y)\mapsto(h(x),\psi(x,y))$ 为$\mathcal{K}$中的成员. 依(6)式,$g\circ h(x)=\psi(x,f(x))$,再据(3)式,$\psi(x,0)=0$,因此 ψ 的每一分量 ψ_i 可写为

$$\psi_i(x,y)=\sum_{j=1}^{p}\psi_i^j(x,y)\cdot y_j,\ i=1,\cdots,p,$$

$g\circ h$ 的分量可写为

$$g_i\circ h(x)=\sum_{j=1}^{p}\psi_i^j(x,f(x))\cdot f_j(x),\ i=1,\cdots,p.$$

因 ϕ 是局部微分同胚,故 $p\times p$ 矩阵$(\psi_i^j(0,0))$是可逆的,从而有 $h^*(g^*\mathcal{M}_p)=f^*\mathcal{M}_p$.

$\Leftarrow$ 为证充分性,先证下面的

引理 8.4.1 设 A,B 为$p\times p$ 实矩阵,则存在一个 $p\times p$ 实

矩阵C,使得$C(I-AB)+B$是可逆矩阵.

证 设$\alpha,\beta:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$分别为对应于$A$和$B$的线性变换.选取$\mathbb{R}^p$的一个基$e_1,\cdots,e_p$,使得$\beta e_i=0(i=r+1,\cdots,p)$,这里$r$为$\beta$的秩.在$\mathbb{R}^p$中取$e'_{r+1},\cdots,e'_p$,使得$\beta e_1,\cdots,\beta e_r,e'_{r+1},\cdots,e'_p$为$\mathbb{R}^p$的基.令$\gamma:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$为线性变换,定义为$\gamma e_i=0(1\leqslant i\leqslant r)$,$\gamma e_i=e'_i(r+1\leqslant i\leqslant p)$,那么

$$(\gamma(I-\alpha\beta)+\beta)(e_i)=\begin{cases}\beta e_i+\sum\limits_{j=r+1}^{p}C_{ij}e'_j,\text{若 }1\leqslant i\leqslant r,\\ e'_i,\text{若 }r+1\leqslant i\leqslant p,\end{cases}$$

因而$\gamma(I-\alpha\beta)+\beta$是可逆线性变换.将对应于$\gamma$的矩阵记为$C$,本引理得证.

现证充分性.假定存在$(\mathbb{R}^n,0)$上的可逆芽h,使得$h^*(g^*\mathscr{M}_p)=f^*\mathscr{M}_p$.欲证$g$与$f$ $\mathscr{K}$-等价,只需证$g\circ h$与f是$\mathscr{C}$-等价的.为简便起见,将$g\circ h$仍记为g,假设条件则变为$g^*\mathscr{M}_p=f^*\mathscr{M}_p$,由此有

$$g_i(x)=\sum_{j=1}^{p}\phi_i^j(x)\cdot f_j(x),\ \phi_i^j\in\varepsilon_n,\ i=1,\cdots,p,$$

和

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{p}\psi_i^j(x)\cdot g_j(x),\ \psi_i^j\in\varepsilon_n,\ i=1,\cdots,p,$$

用矩阵来表示,

$$g=\phi\cdot f,\quad f=\psi\cdot g,$$

其中$\phi=(\phi_i^j)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$,$\psi=(\psi_i^j)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$,因此

$$g=[\phi+C(I-\psi\cdot\phi)]\cdot f$$

对任意矩阵C皆成立.按照上述引理,可选取C,使得$\phi(0)+C(I-\psi(0)\cdot\phi(0))$为可逆矩阵.记$\phi'=\phi+C(I-\psi\cdot\phi)$,令

$$\tilde{\phi}:(x,y)\mapsto(x,\phi'(x)\cdot y),$$

易见 $\tilde{\phi}\in\mathscr{C}$ 且 $g=\tilde{\phi}\cdot f$. 证毕.

记 $I(f)=f^*\mathscr{M}_p$. 由命题 8.4.1, 可得到

推论 8.4.1 设 $f,g\in\varepsilon^0(n,p)$, 则下列诸断言是等价的:

(i) f 与 g 属于同一条 $\mathscr{C}$-轨道, 即 f 和 g 是 $\mathscr{C}$-等价的,

(ii) 存在 $\phi\in\mathscr{C}$, 使得 $\phi(\mathrm{graph}f)=\mathrm{graph}g$,

(iii) $I(f)=I(g)$,

(iv) 存在可逆 $p\times p$ 矩阵 (u_{ij}), $(u_{ij}\in\varepsilon_n)$, 使得

$$f_i=\sum_{j=1}^{p}u_{ij}g_j,\ i=1,\cdots,p.$$

至此, 我们已介绍了 Mather 的 5 类微分同胚芽群. 右等价群可看作 $\mathscr{K}$ 的子群. 事实上, 将每一 $h\in\mathscr{R}$ 等同于 $h\times 1_{(\mathbb{R}^p,0)}\in\mathscr{K}$, 其中 $1_{(\mathbb{R}^p,0)}$ 表 $(\mathbb{R}^p,0)$ 上的恒同映射芽, 又 $\mathscr{R}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用是 $\mathscr{K}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用的限制. 类似地, 左等价群 $\mathscr{L}$ 也可以看成 $\mathscr{K}$ 的子群. 另一方面, $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{C}$ 的半直积, 这是因为 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{K}$ 的正规子群, 且 $\mathscr{K}$ 中的每一元素可惟一地表为积 rc, 这里 $r\in\mathscr{R}$, $c\in\mathscr{C}$. 此外, 群 $\mathscr{A}$ 可以用明显的方式等同于 $\mathscr{K}$ 的子群, $\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用是 $\mathscr{K}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用的限制. 又群 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{L}$ 的直积, 群 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$ 均可看作 $\mathscr{A}$ 的子群.

下面说明 $\mathscr{A}$-等价细于 $\mathscr{K}$-等价. 设 $f,g\in\varepsilon^0(n,p)$ 使得 $f\underset{\mathscr{A}}{\sim}g$, 于是存在 $(h,k)\in\mathscr{A}$, 使得 $f\circ h=k\circ g$. 令 $\phi=h\times k$, 有

$$\begin{aligned}\phi\circ(1,g)(x)&=(h\times k)(x,g(x))=(h(x),k(g(x)))\\&=(h(x),f(h(x)))=(1,f)\circ h(x),\forall x\in(\mathbb{R}^n,0),\end{aligned}$$

从而

$$\phi\circ(1,g)=(1,f)\circ h,$$

这说明 f 与 g 是 $\mathscr{K}$-等价的. 但反过来不真, 见下例.

例 1 设 $f,g:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 的定义如下:

$$f(x)=(x^2,0),\quad g(x)=(x^2,x^3).$$

因为 $I(f)=\langle x^2\rangle\varepsilon_1$, $I(g)=\langle x^2,x^3\rangle\varepsilon_1=I(f)$,所以 $f\widetilde{_{\mathscr{C}}}g$,更不待说 $f\widetilde{_{\mathscr{K}}}g$. 另一方面,$f$ 与 g 不是 $\mathscr{A}$-等价的. 若不然,则存在 $(h,k)\in\mathscr{A}$,使得 $g\circ h=k\circ f$,取其代表,易见 k 将 $\mathrm{Im}f-\{0\}$ 映为 $\mathrm{Img}-\{0\}$. 但这是不可能的,因 $\mathrm{Im}f-\{0\}$ 连通,$\mathrm{Img}-\{0\}$ 不连通.

8.4.2 对应于群$\mathscr{K}$和$\mathscr{C}$的切空间及轨道切空间

群 $\mathscr{C}$ 的成员 ϕ 可表示为 $\phi(x,y)=(x,\psi(x,y))$,因此只考虑了$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的"垂直"形变,用向量场的语言来描述,可以用 $V(\pi_2)$ 中的成员来表达,其中 $\pi_2:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ 为标准投射. 又因 ϕ 保持子空间$\mathbb{R}^n\times\{0\}$不动,即对于与 $0\in\mathbb{R}^n$ 相邻近的点 x,均有 $\psi(x,0)=0$, 所以只需考虑 $\mathscr{M}_p\cdot V(\pi_2)$, 用坐标表示, 则为 $\mathscr{M}_p\cdot\underbrace{\varepsilon_{n+p}\oplus\cdots\oplus\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_{n+p}}_{p个}=\mathscr{M}_p\cdot(\varepsilon_{n+p})^{\times p}$. 而群 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{R}$ 与 $\mathscr{C}$ 的半直积,相应地考虑 $\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n)+\mathscr{M}_p\cdot V(\pi_2)$,其成员 V 具有下列形式:

$$V=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}Y_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

其中 $X_i\in\mathscr{M}_n(i=1,\cdots,n)$, $Y_j\in\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_{n+p}(j=1,\cdots,p)$. 据定理1.3.2,通过积分可得到单参数局部微分同胚群$\{\phi_t:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\}$,其中每一 $\phi_t\in\mathscr{K}(t\in(\mathbb{R},0))$,且$\left.\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right|_{t=0}=V$. 进而考虑$\mathscr{K}$在 $\varepsilon^0(n,p)$上的无穷小作用,有下列

命题8.4.2 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$,V 为$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$上的 C^∞ 向量场芽,具有下列形式:

$$V=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}Y_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

其中 $X_i\in\mathscr{M}_n(i=1,\cdots,n)$, $Y_j\in\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_{n+p}(j=1,\cdots,p)$. 由 V 所确定的 $\mathscr{K}$ 中单参数子群记为$\{\phi_t\}$. 令 $f_t=\phi_t\cdot f$,则

$$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+Y(x,f(x)),\tag{7}$$

其中 $Y=(Y_1,\cdots,Y_p)$.

证明留作练习.

记$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}$为 $V\cdot f$,规定 $\varepsilon^0(n,p)$的向量子空间 $T\mathscr{K}(f)$如下:

$$T\mathscr{K}(f)=\{V\cdot f\mid V\in\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n)+\mathscr{M}_p\cdot V(\pi_2)\},$$

它叫做过 f 的接触轨道 $\mathscr{K}\cdot f$ 在 f 处的切空间.

命题 8.4.3 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$,则

$$T\mathscr{K}(f)=tf(\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f).$$

证 取 $V\cdot f\in T\mathscr{K}(f)$. 由表达式(7)及 $Y(x,0)=0$, Y 的每一分量 $Y_i(i=1,\cdots,p)$可表为

$$Y_i(x,y)=\sum_{j=1}^{p}y_jY^j(x,y),\ Y^j\in\varepsilon_{n+p},j=1,\cdots,p.$$

令 $\alpha:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$, $x\mapsto(x,f(x))$,显然 α 是一个浸入芽,它是从$(\mathbb{R}^n,0)$到 graph$f$ 的局部微分同胚,且 graph$f$ 是$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 中的一个 n 维微分子流形芽,因而借助于 graph$f$ 拉回,ε_{n+p}映成 ε_n,于是

$$Y_i(x,f(x))=\sum_{j=1}^{p}f_j(x)Y^j(x,f(x))\in f^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_n,$$

并且 $Y(x,f(x))\in f^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_n^{\times p}$或 $Y(x,f(x))\in f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f)$ ($V(f)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$). 由于 Y_i 是任取的,所以可得到 $f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f)$ 的所有成员. 此外,

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\middle|X_i\in\mathscr{M}_n,i=1,\cdots,n\right\}=\mathscr{M}_n\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$

$$=tf(\mathscr{M}_n\cdot V(\mathbb{R}^n)),$$

于是命题得证.

由上述命题,自然引入下面的

定义 8.4.1 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$. 令

(i) $T_e\mathscr{C}(f)=T\mathscr{C}(f)=f^*\mathscr{M}_p\cdot V(f)$，称为在群 $\mathscr{C}$ 作用下于 f 处的切空间.

(ii) $T_e\mathscr{K}(f)=T_e\mathscr{R}(f)+T_e\mathscr{C}(f)$，称为在群 $\mathscr{K}$ 作用下于 f 处的切空间.

又轨道切空间 $T\mathscr{K}(f)$ 可写为

$$T\mathscr{K}(f)=T\mathscr{R}(f)+T\mathscr{C}(f).$$

易见这些切空间均为 ε_n-模，而且都是有限生成的，计算起来较为方便.

8.4.3 $\mathscr{K}$-轨道在导网空间中的投影

群 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(n,p)$ 是群 L_{n+p} 的子群，这里 L_{n+p} 是由 $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)$ 上的微分同胚芽组成的群. 将 $\mathscr{K}$ 中的成员 ϕ 取 r-导网 $(r\geqslant 1)$，记为 $j^r\phi$，令

$$\mathscr{K}^r=\{j^r\phi\mid\phi\in\mathscr{K}\},$$

则 $\mathscr{K}^r$ 是 L^r_{n+p} 的 Lie 子群(留作练习). $J^r:\varepsilon(n,p)\to J^r_{n,p}$ 为标准投影(见 §8.2 中第四段). 可以证明群 $\mathscr{K}$ 在 $\varepsilon^0(n,p)$ 上的作用诱导出 Lie 群 $\mathscr{K}^r$ 在 C^∞ 流形 $J^{r,0}_{n,p}$ 上的作用，并且轨道 $\mathscr{K}\cdot f(f\in\varepsilon^0(n,p))$ 在 j^r 下的像 $j^r(\mathscr{K}\cdot f)=\mathscr{K}^r\cdot j^rf$ 是 $J^{r,0}_{n,p}$ 中的一条经过 j^rf 的 $\mathscr{K}^r$-轨道，它是 $J^{r,0}_{n,p}$ 中的子流形.

命题 8.4.4 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$，则对任意正整数 r，轨道 $\mathscr{K}^r\cdot j^rf$ 在 j^rf 处的切空间 $T\mathscr{K}^r\cdot j^rf$ 是 $J^r_{n,p}$ 中的子空间 $j^r(T\mathscr{K}(f))$，即

$$T\mathscr{K}^r\cdot j^rf=j^r(T\mathscr{K}(f)).$$

证明留作练习.

§8.5 映射芽的 $\mathscr{K}$-余维数

定义 8.5.1 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$. 若 $T_e\mathscr{K}(f)$ 在 $V(f)$ 中具有有

限余维，则称 f 是一个具有有限 $\mathscr{K}$-余维的映射芽. 在这种情形下，将商空间 $V(f)/T_e\mathscr{K}(f)$ 的维数定义为 f 的 $\mathscr{K}$-余维数，记为 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})$.

等价地，若 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维，则

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K}) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon(n,p)}{\varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + I(f)\cdot\varepsilon(n,p)}.$$

根据命题 3.1.1，有下列判别法.

命题 8.5.1 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 具有有限 $\mathscr{K}$-余维的必要充分条件是存在正整数 k，使得 $\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)\subset \varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+I(f)\cdot\varepsilon(n,p)$.

将 f 的分量记为 $f_1,\cdots,f_p$，又 $\varepsilon(n,p)=\underbrace{\varepsilon_n\oplus\cdots\oplus\varepsilon_n}_{p\text{个}}$，故 $I(f)\cdot\varepsilon(n,p)$ 由所有的 p-联组 $(0,\cdots,f_i,\cdots,0)$ 所生成，其中 f_i 在 p-联组中取任意位置，因此 $\mathscr{K}$-切空间 $T_e\mathscr{K}(f)$ 作为有限生成的 ε_n-模，由诸 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 及 $(0,\cdots,f_j,\cdots,0)$ 所生成. 而 $\mathscr{M}_n^k$ 由 $x_1,\cdots,x_n$ 的 k 次单项式全体作为其生成元，因此 $\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)$ 由形如 $(0,\cdots,m,\cdots,0)$ 的所有 p-联组生成，其中 m 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的 k 次单项式. 欲证 $\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)\subset\varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+I(f)\cdot\varepsilon(n,p)$，只需验证每一 $(0,\cdots,m,\cdots,0)$ 可以写为 $T_e\mathscr{K}(f)$ 的生成元的线性组合，其系数取自 ε_n. 具体验证时，从 $k=1$ 作起，依次令 $k=1,2,3,\cdots$. 存在两种可能性，或找到 k，使得条件 $\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)\subset T_e\mathscr{K}(f)$ 成立，或对任意 k，条件不可能被满足.

例 1 §8.3，例 3 讨论的映射芽 $f(x,y)=(x^2,y^2)$ 不具有有限 $\mathscr{A}$-余维，现说明它有有限 $\mathscr{K}$-余维. 这里 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=(2x,0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=(0,2y)$，又 $I(f)\cdot\varepsilon(2,2)$ 由 $(x^2,0)$，$(y^2,0)$，$(0,x^2)$，$(0,y^2)$ 生成，所

以 $T_e\mathscr{K}(f)$作为 $\varepsilon(2,2)$中的 ε_2-子模，由$(x,0)$，$(y^2,0)$，$(0,x^2)$，$(0,y)$生成.

现验证条件 $\mathscr{M}_2^k\cdot\varepsilon(2,2)\subset T_e\mathscr{K}(f)$. 首先令 $k=1$，此时 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$由$(x,0)$，$(y,0)$，$(0,x)$，$(0,y)$生成，显然$(x,0)$，$(0,y)\in T_e\mathscr{K}(f)$，但$(y,0)$，$(0,x)\notin T_e\mathscr{K}(f)$，因它们不能表示为 $T_e\mathscr{K}(f)$的 4 个生成元的线性组合. 然后令 $k=2$，此时 $\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$作为 ε_2-子模由$(x^2,0)$，$(xy,0)$，$(y^2,0)$，$(0,x^2)$，$(0,xy)$，$(0,y^2)$生成，显然有 $\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)\subset T_e\mathscr{K}(f)$，所以 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维.

为计算 f 的 $\mathscr{K}$-余维数，令

$$c_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{T_e\mathscr{K}(f) + \mathscr{M}_n^k \cdot \varepsilon(n,p)}{T_e\mathscr{K}(f) + \mathscr{M}_n^{k+1} \cdot \varepsilon(n,p)}, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

这里 c_k 表示 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\varepsilon(n,p)$在 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)$中的余维数. 基于推论 3.1.3，有

推论 8.5.1 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$具有有限 $\mathscr{K}$-余维当且仅当除有限个外，所有的 c_k 均为零. 并且在这种情形下，

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K}) = \text{有限和}\sum_k c_k .$$

为求 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})$，依次计算 $c_0,c_1,c_2,\cdots$. 而在求 c_k 时，首先对 $\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)$的生成元$(0,\cdots,m,\cdots,0)$（这里 m 为$x_1,\cdots,x_n$ 的k 次单项式），检验它们是否位于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\varepsilon(n,p)$中，然后将不属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\varepsilon(n,p)$的所有生成元挑选出来，从中找出一个基. 即 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\varepsilon(n,p)$在 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p)$中的补空间的基，这个基所含的成员个数便是所求的 c_k.

我们对例 1 继续讨论. 由前面的计算可知，$T_e\mathscr{K}(f)\subset\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$，所以 $c_0=2$. 为计算 c_1，首先确定 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中哪些生成元位于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$中. $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$的生成元为$(x,0)$，$(y,0)$，$(0,x)$，$(0,y)$，其中$(x,0)$，$(0,y)\in T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$，而$(y,0)$，$(0,x)$不属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$，它们正好组成

$T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$在 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基，因此 $c_1=2$. 此外，$\mathscr{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)\subset T_e\mathscr{K}(f)$于是

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K}) = c_0 + c_1 = 2 + 2 = 4.$$

例 2 设映射芽 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$定义为 $f(x)=(0,\cdots,0,x^{t+1})$，其中整数 $t\geqslant 1$. 容易验证 $T_e\mathscr{K}(f)$作为 ε_1-模，由$(x^{t+1},0,\cdots,0),(0,x^{t+1},0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,x^{t+1},0)$及$(0,\cdots,0,x^t)$生成.

现计算 c_k. 因理想 $\mathscr{M}_1^k$ 由 x^k 生成，故子模 $\mathscr{M}_1^k\cdot\varepsilon(1,p)$由诸向量$(0,\cdots,x^k,\cdots,0)$所生成，这样的生成元共有 p 个. 要判断它们是否属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_1^{k+1}\cdot\varepsilon(1,p)$，分 3 种情形讨论：

(i) $k<t$，此时 $\mathscr{M}_1^k\cdot\varepsilon(1,p)$的所有生成元均不属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_1^{k+1}\cdot\varepsilon(1,p)$，并且这样的生成元共 p 个，它们形成补空间的基，故 $c_k=p$.

(ii) $k=t$. $\mathscr{M}_1^t\cdot\varepsilon(1,p)$的生成元中除$(0,\cdots,0,x^t)\in T_e\mathscr{K}(f)$外，其余 $p-1$ 个均不属于 $T_e\mathscr{K}(f)+\mathscr{M}_1^{t+1}\cdot\varepsilon(1,p)$，这 $p-1$ 个生成元形成补空间的基，故 $c_t=p-1$.

(iii) $k>t$. $\mathscr{M}_1^k\cdot\varepsilon(1,p)$的所有生成元均位于 $T_e\mathscr{K}(f)$中，故 $c_k=0$.

于是 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})=\sum\limits_{k=0}^{t-1}c_k+c_t=pt+p-1$.

例 3 设 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为 $f(x,y)=(xy,x^a+y^b)$，其中整数 $a,b\geqslant 3$. 计算 $\mathrm{Codim}(f,x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(y,ax^{a-1}),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=(x,by^{b-1})$$

生成 Jacobi 模 $J(f)$. 理想 $I(f)$由 xy,x^a+y^b 生成，因而子模 $I(f)\cdot\varepsilon(2,2)$由

$$(xy,0),(x^a+y^b,0),(0,xy),(0,x^a+y^b)$$

生成. 又

$$(x^2,0) = x\frac{\partial f}{\partial y} - (0, bxy^{b-1})$$

$$= x\frac{\partial f}{\partial y} - by^{b-2}(0,xy) \in T_e\mathcal{K}(f),$$

$$(y^2,0) = y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - (0, ax^{a-1}y)$$

$$= y\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - ax^{a-2}(0,xy) \in T_e\mathcal{K}(f),$$

$$\lambda(0,x^a) + \mu(0,y^b) = \lambda(0,x^a + y^b) + \frac{\mu-\lambda}{b}y(x, by^{b-1})$$

$$+ \frac{\lambda-\mu}{b}(xy,0) \in T_e\mathcal{K}(f),$$

所以 $\mathcal{K}$-切空间 $T_e\mathcal{K}(f)$ 可由 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 以及 $(x^2,0)$, $(xy,0)$, $(y^2,0)$, $(0,x^a)$, $(0,xy)$, $(0,y^b)$ 生成.

现计算 c_k, $k\geqslant 1$. 理想 $\mathcal{M}_2^k$ 由单项式 x^iy^j 生成($i+j=k$), 因而子模 $\mathcal{M}_2^k\cdot\varepsilon(2,2)$ 由向量 $(x^iy^j,0)$, $(0,x^iy^j)$ 生成($i+j=k$). 显然当 $i\geqslant 1$ 且 $j\geqslant 1$ 时, 这些向量均属于 $T_e\mathcal{K}(f)$. 余下只需考虑 $(x^k,0)$, $(y^k,0)$, $(0,x^k)$, $(0,y^k)$. 我们断言前两个位于 $T_e\mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$ 中. 事实上, 当 $k=1$ 时, $(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y} - (0, by^{b-1})$, 而 $b\geqslant 3$, $y^{b-1}\in\mathcal{M}_2^2$, 故 $(x,0)\in T_e\mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$. 类似地, $(y,0) = \frac{\partial f}{\partial x} - (0, ax^{a-1}) \in T_e\mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^2\cdot\varepsilon(2,2)$.

当 $k\geqslant 2$ 时, $(x^k,0) = x^{k-2}(x^2,0)\in T_e\mathcal{K}(f)$, $(y^k,0) = y^{k-2}(y^2,0)\in T_e\mathcal{K}(f)$.

最后讨论 $(0,x^k)$, $(0,y^k)$, 显然只有在 $k\geqslant a$ 时, $(0,x^k)\in T_e\mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$, 而对于 $(0,y^k)$, 仅当 $k\geqslant b$ 时, 它才属于 $T_e\mathcal{K}(f) + \mathcal{M}_2^{k+1}\cdot\varepsilon(2,2)$.

综上所述,$(0,x^k)(1\leqslant k\leqslant a-1)$及$(0,y^k)(1\leqslant k\leqslant b-1)$形成 $T_e\mathscr{K}(f)$在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基,因而

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K}) = 2+(a-1)+(b-1) = a+b.$$

例 4 设映射芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$由 $f(x,y)=(x^2+y^2,x^a)$给定,这里整数 $a\geqslant 3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x,ax^{a-1}),\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (2y,0)$$

生成 Jacobi 模 $J(f)$. 理想 $I(f)$由 x^2+y^2,x^a 生成,因而子模 $I(f)\cdot\varepsilon(2,2)$由

$$(x^2+y^2,0),(x^a,0),(0,x^2+y^2),(0,x^a)$$

生成. 类似于上例中的计算,可找到$\mathscr{K}$-切空间 $T_e\mathscr{K}(f)$在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$,于是

$$\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K}) = 2+(a-1)+(a-1) = 2a.$$

命题 8.5.2 设 $f,g\in\varepsilon^0(n,p)$. 若 f 与 g 是$\mathscr{K}$-等价的,则 $\mathrm{Codim}(f,\mathscr{K})=\mathrm{Codim}(g,\mathscr{K})$.

证明留作练习.

本命题说明一个映射芽的$\mathscr{K}$-余维数是一个$\mathscr{K}$-不变量.

第九章　映射芽的通用开折

英国数学家 C. T. C. Wall 曾经指出，奇点理论对数学最重要的贡献之一是 Thom 提出的通用开折，它是突变理论的核心．我们在第三章中曾对实值函数芽介绍过通用形变定理，本章将对映射芽介绍两个通用性定理．第一个是对群 $\mathscr{A}$ 作用下的开折而言，称为 $\mathscr{A}$-通用开折定理或简称为通用开折定理，它曾被 Thom 猜测而由 Mather 证明．第二个则在接触等价意义下以形变的形式来表达，叫做 $\mathscr{K}$-通用形变定理．由于这两个通用性定理证明方法类似，我们仅对通用开折定理给出详细证明．

§9.1　通用开折

§8.1 中已引入映射芽的开折概念．为定义通用开折，有必要再引入一些有关概念．

定义 9.1.1　设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$ 为 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 的 r-参数开折，它由 $F(u,x)=(u,f(u,x))$ 给定，其中 $f(0,x)=f_0(x)$，$u=(u_1,\cdots,u_r)$ 为开折参数．假定

$$h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0),\ v\ \mapsto u=h(v)$$

为 C^∞ 映射芽，定义 $h^*F:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^p,0)$ 为

$$h^*F(v,x)=(v,f(h(v),x)),$$

称为由 h 诱导的 F 的拉回．易见 h^*F 是 f_0 的 s-参数开折．

定义 9.1.2　设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$．f_0 的两个 r-参数开折 F 和 G 叫做等价的，如果存在 F 和 G 的参数空间之间的微分同胚芽 h：

$(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$,使得 G $\mathscr{A}$-同构于 h^*F.

显然,开折的等价是一个等价关系.

定义 9.1.3 设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$.

(i)f_0 的开折 F 叫做通用开折,如果 f_0 的任意其他开折 G 皆 $\mathscr{A}$-同构于 F 的某一拉回 h^*F,其中 h 是从 G 的参数空间到 F 的参数空间的 C^∞ 映射在原点处的芽.

(ii)f_0 的通用开折 F 叫做万有开折,如果 F 所含的开折参数的数目最少.

C^∞ 芽 f_0 的开折有无穷多个.若 f_0 存在通用开折,则 f_0 的每一开折均可由它的通用开折"诱导"出来,因此寻求一个映射芽具有通用开折的条件是很有意义的.

定理 9.1.1($\mathscr{A}$-通用开折定理) 设 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,$F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$,$(u,x)\mapsto F(u,x)=(u,f(u,x))$为 f_0 的 r-参数开折,因而 $f(0,x)=f_0(x)$.那么 F 为 f_0 的通用开折的必要充分条件是 F 的初始速度$\dot{F}_i(i=1,\cdots,r)$满足下列条件:

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon(n,p),\tag{1}$$

其中$\dot{F}_i(x)=\dfrac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)\ (i=1,\cdots,r)$.

证 必要性.任取 $g\in\varepsilon(n,p)$.定义 f_0 的单参数线性开折 G 为

$$G(v,x)=(v,f_0(x)+vg(x)),\quad v\in\mathbb{R},$$

G 的初始速度$\dot{G}=g$.因假定 F 是通用开折,故 G 必 $\mathscr{A}$-同构于 h^*F,其中 $h:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^r,0)$,$v\mapsto h(v)=(h_1(v),\cdots,h_r(v))$为 C^∞ 芽.记 $H=h^*F$,则

$$H(v,x)=(v,f(h(v),x)),$$

且 H 的初始速度

$$\dot{H}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}v}(0)\cdot\dot{F}_i\in\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}.$$

为证 $g\in T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}$，只需证 $g-\dot{H}\in T_e\mathscr{A}(f_0)$. 现 H 和 G 是 $\mathscr{A}$-同构的，这意指存在可逆芽 $\Phi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$，$\Phi(v,x)=(v,\phi(v,x))$ 及 $\Psi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$，$\Psi(v,y)=(v,\psi(v,y))$，使得

$$\Psi\circ G=H\circ\Phi,$$

或

$$(v,\psi(v,f_0(x)+vg(x)))=(v,f(h(v),\phi(v,x))),$$

其中 $(v,x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$. 因为

$$\frac{\partial}{\partial v}\psi(v,f_0(x)+vg(x))\Big|_{(0,x)}$$

$$=\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x))+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial\psi}{\partial y_i}(0,f_0(x))\cdot g_i(x)$$

$$=\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x))+g(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}f(h(v),\phi(v,x))\Big|_{(0,x)}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)\cdot\frac{\mathrm{d}h_i}{\mathrm{d}v}(0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(0,x)\cdot\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)$$

$$=\dot{H}(x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x),$$

所以

$$g(x)-\dot{H}(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial v}(0,x)\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x)-\frac{\partial\psi}{\partial v}(0,f_0(x)),$$

这说明 $g-\dot{H}\in T_e\mathscr{A}(f_0)$，因而 $g\in T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}$. 由于 $g\in\varepsilon(n,p)$是任取的，因此(1)式成立.

充分性的证明放在下一节.

由定理 9.1.1 立即可知：$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$具有有限 $\mathscr{A}$-余维当且仅当f_0 具有万有开折. 并且 f_0 的万有开折所含的开折参数个数等于 f_0 的 $\mathscr{A}$-余维数.

定理 9.1.2 设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$的 $\mathscr{A}$-余维数$\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})=r$，则

(i)f_0 的所有 r-参数万有开折皆等价，

(ii)若 G 为f_0 的 s-参数通用开折，$s>r$，则 G 等价于f_0 的万有开折的常值开折(含 $s-r$ 个参数).

证明提示 参照命题 6.1.3 的证法.

定理 9.1.3 无穷小稳定映射芽必为稳定芽.

证 设 $f\in\varepsilon^0(n,p)$是无穷小稳定芽，则 $T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p)$. 由定理 9.1.1 知，$f$ 是它自身的万有开折，因此 f 的任意开折必 $\mathscr{A}$-同构于f 的常值开折，f 是 $\mathscr{A}$-稳定的. 证毕.

假设 $f_0\in\varepsilon^0(n,p)$具有有限 $\mathscr{A}$-余维. 如果能选取 $g_1,\cdots,g_r\in\varepsilon(n,p)$，使得$\{g_1,\cdots,g_r\}$是 $T_e\mathscr{A}(f_0)$在 $\varepsilon(n,p)$中的补空间的基，即

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{g_1,\cdots,g_r\}=\varepsilon(n,p),$$

其中 $r=\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})$. 令

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(x)),\ u=(u_1,\cdots,u_r),$$

则 F 是f_0 的万有开折.

例 1 设整数 $r\geqslant 3$，$f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$，$x\mapsto x^r$. 因有

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{x,x^2,\cdots,x^{r-2}\}=\varepsilon(1,1),$$

因此 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}^{r-2}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^{r-2}\times\mathbb{R},0),$$
$$(u,x)\mapsto(u,x^r+u_1x^{r-2}+\cdots+u_{r-2}x).$$

例 2 设 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$定义为 $f_0(x)=(x^2,x^3)$,这是§8.3 中例 2.我们已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\cdot g=\varepsilon(1,2),\ g=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},$$

所以 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,0),\ (u,x)\mapsto(u,x^2,x^3+ux).$$

例 3 设 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2+y^3,y^2+x^3)$,这是§8.3 中例 4.我们已证明 $\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{A})=2$,并且

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{h_1,h_2\}=\varepsilon(2,2),$$

其中 $h_1=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},h_2=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$,所以 f_0 的万有开折为

$$F:(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0),$$
$$(u,x,y)\mapsto(u,x^2+y^3+u_1y,y^2+x^3+u_2x),$$

这里 $u=(u_1,u_2)$.

§9.2 通用开折定理的证明

9.2.1 两个引理

如同在形变理论中讨论的那样,证明通用开折定理的充分性要用到两个引理,它们分别叫做开折理论中的几何引理与代数引

理.

设 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$. 假定

$$F:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$
$$(u,x) \mapsto (u, f(u,x)),\ f(0,x) = f_0(x)$$

为 f_0 的 r-参数开折,令

$$F_1:(\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^p, 0),$$

$$(u_2,\cdots,u_r,x) \mapsto (u_2,\cdots,u_r,f(0,u_2,\cdots,u_r,x)),$$

则 F_1 是 F 在子空间 $u_1=0$ 上的限制.

引理 9.2.1 设 f_0, F 及 F_1 如上所述. 如果在 $(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0)$ 及 $(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$ 上分别存在向量场芽

$$\overline{X} = \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{r} \zeta_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j(u,x) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1}$$

和

$$\overline{Y} = \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{r} \zeta_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{p} Y_j(u,y) \frac{\partial}{\partial y_j}, \tag{2}$$

使得

$$\mathrm{D}F \cdot \overline{X} = \overline{Y} \circ F, \tag{3}$$

那么存在淹没芽 $h:(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^{r-1},0)$,使得 F $\mathscr{A}$-同构于 $h^* F_1$.

证明提要 条件(1)和(2)说明 $\overline{X}$ 及 $\overline{Y}$ 均为 $(\mathbb{R}^r,0)$ 上的向量场芽

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{r} \zeta_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

的提升. 而 ζ 的积分曲线乃是下列常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 1, \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \zeta_2(u), \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t} = \zeta_r(u) \end{cases}$$

的解曲线，并且这些解曲线必横截于子空间 $u_1=0$. 沿这些积分曲线投影到子空间 $u_1=0$ 上，便得到所要求的淹没芽 h.

另外，F 是 F_1 的单参数开折，根据命题 8.2.1，条件(3)意指 F 是 F_1 的 $\mathscr{A}$-平凡开折. 又条件(3)等价于

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^{r} \zeta_i(u) \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n} X_j(u,x) \frac{\partial f}{\partial x_j} = Y \circ F, \quad (4)$$

其中 $Y:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0) \to \mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 芽，其分量为 $Y_1, \cdots, Y_p$.

证明细节请读者补述.

现考虑代数引理. 设 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$. 假定

$$F:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$
$$(u,x) \mapsto (u, y = f(u,x))$$

为 f_0 的 r-参数开折. 我们知道，

$$T_e\mathscr{A}(f_0) = J(f_0) + \tau(f_0) \subset \varepsilon_x^{\times p},$$

其中 $J(f_0) = \varepsilon_x \left\{ \dfrac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f_0}{\partial x_n} \right\}$, $\tau(f_0) = \varepsilon_y \{e_1, \cdots, e_p\}$，因此形式地规定在 F 处的“垂直”切空间为

$$\tilde{T}_e\mathscr{A}(F) = \tilde{J}(F) + \tilde{\tau}(F) \subset (\varepsilon_{u,x})^{\times p},$$

其中

$$\tilde{J}(F) = \varepsilon_{u,x} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \tilde{\tau}(F) = \varepsilon_{u,y} \{e_1, \cdots, e_p\}.$$

引理 9.2.2 下列条件是等价的:

(i) $T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{g_{1,0},\cdots,g_{r,0}\}=(\varepsilon_x)^{\times p}$,

(ii) $\widetilde{T}_e\mathscr{A}(F)+\varepsilon_u\{g_1,\cdots,g_r\}=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$,

其中 $g_i\in(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$, $g_{i,0}\in\varepsilon_x^{\times p}$ 且 $g_{i,0}(x)=g_i(0,x)(i=1,\cdots,r)$.

证 将$(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$中的成员限制在 $u=0$ 上,由(ii)可导出(i).下证(i)⇒(ii).

令 $M=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}/\tilde{J}(F)$,它是有限生成的 $\varepsilon_{u,x}$-模,因为秩有限的自由 $\varepsilon_{u,x}$-模的商模是有限生成的.简记$\langle u\rangle=\mathscr{M}_u\cdot\varepsilon_{u,x}$,它是 $\varepsilon_{u,x}$中由 $u_1,\cdots,u_r$ 生成的理想.显然 $\varepsilon_{u,x}/\langle u\rangle=\varepsilon_x$.再令 $M_0=M/\langle u\rangle\cdot M$,则

$$M_0\cong(\varepsilon_{u,x})^{\times p}/(\langle u\rangle\cdot(\varepsilon_{u,x})^{\times p}+\tilde{J}(F))$$

$$\cong(\varepsilon_x)^{\times p}/\varepsilon_x\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(0,x)\right\}$$

$$=(\varepsilon_x)^{\times p}/J(f_0).$$

M_0 是 ε_x-模,借助环同态 f_0^*,它可看作 ε_y-模.类似地,借助环同态 F^*, $\varepsilon_{u,x}$-模M 可视为$\varepsilon_{u,y}$-模.而条件(i)蕴涵 M_0 是一个有限生成的 ε_y-模.据定理 5.3.3,M 为有限生成的$\varepsilon_{u,y}$-模.此外,将条件(i)与(ii)分别改写为下面的条件(i)′和(ii)′.

(i)′ $\overline{N}+\mathbb{R}\{\bar{g}_{1,0},\cdots,\bar{g}_{r,0}\}=M_0$,

其中 $\overline{N}=\tau(f_0)/\tau(f_0)\cap J(f_0)\cong T_e\mathscr{A}(f_0)/J(f_0)$, $\bar{g}_{i,0}$是 $g_{i,0}$在 M_0 中的投影,

(ii)′ $N+\varepsilon_u\{\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_r\}=M$,

其中 $N=\tilde{\tau}(F)/\tilde{\tau}(F)\cap\tilde{J}(F)\cong\widetilde{T}_e\mathscr{A}(F)/\tilde{J}(F)$, $\bar{g}_i$ 是g_i 在M 中的投影.

易见 $\overline{N}$ 是N 在M_0 中的投影,$\bar{g}_{i,0}$是 $\bar{g}_i$ 在M_0 中的投影.据定理 5.3.2,(i)′与(ii)′是等价的,因此(i)⇒(ii).

注 在上述证明中,通过相继使用定理 5.3.3 和 5.3.2,我们

两次应用了 Malgrange 预备定理.

9.2.2 定理 9.1.1 的充分性证明

证明思路与通用形变定理 6.3.1 相同. 设 F 是 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$ 的 r-参数开折, 满足条件

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \cdots, \dot{F}_r\} = \varepsilon(n,p), \tag{5}$$

需证 F 是通用开折. 假设 G 是 f_0 的任意开折, 含有 s 个开折参数 $v_1, \cdots, v_s$, 将 G 写为

$$G(v,x) = (v, f_0(x) + g(v,x)),\ g(0,x) = 0,$$

其中 $v = (v_1, \cdots, v_s)$. 构作 F 与 G 的"直和" H, 令 $H: (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0)$ 定义为

$$H(v,u,x) = (v, u, f(u,x) + g(v,x)),$$

并记 $h(v,u,x) = f(u,x) + g(v,x)$. 显然 H 是 f_0 的一个 $(s+r)$-参数开折. 将 H 在子空间 $v_1 = 0, v_1 = v_2 = 0, \cdots, v_1 = v_2 = \cdots = v_s = 0$ 上的限制依次记为 $H_1, H_2, \cdots, H_s$, 显然 $H_s = F$. 又 H 在子空间 $u = 0$ 上的限制为 G.

断言: 存在淹没芽 $A: (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$, 使得 H $\mathscr{A}$-同构于 $A^* F$.

对 s 使用归纳证明, 关键的一步描述如下: 假定存在淹没芽 $B: (\mathbb{R}^{s-1} \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^r, 0)$, 使得 $B^* F$ 与 H_1 是 $\mathscr{A}$-同构的. 证明断言对 s 亦成立.

利用代数引理 9.2.2 及条件(5), 得到

$$\widetilde{T}_e\mathscr{A}(H) + \varepsilon_{v,u}\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_r}\right\} = (\varepsilon_{v,u,x})^{\times p}.$$

而 $\dfrac{\partial h}{\partial v_1} = \dfrac{\partial g}{\partial v_1} \in (\varepsilon_{v,u,x})^{\times p}$, 由上式知, 存在 $X_i(v,u,x) \in \varepsilon_{v,u,x}$ $(i = 1, \cdots, n)$, $Y_j(v,u,y) \in \varepsilon_{v,u,y}$ $(j = 1, \cdots, p)$ 及 $\zeta_k(v,u) \in \varepsilon_{v,u}$ $(k = 1, \cdots, r)$, 使得

$$\frac{\partial h}{\partial v_1}=-\sum_{i=1}^{n}X_i(v,u,x)\frac{\partial h}{\partial x_i}+Y\circ H-\sum_{k=1}^{r}\zeta_k(v,u)\frac{\partial h}{\partial u_k},$$

这里 $Y=(Y_1,\cdots,Y_p)$. 将上式与几何引理 9.2.1 中的分析表达式(4)相比较,立即可知从引理 9.2.1 可推出 H $\mathscr{A}$-同构于$C^* H_1$,其中 $C:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^{s-1}\times\mathbb{R}^r,0)$为淹没芽. 然后令 $A=B\circ C$,则 A 为淹没芽,并且 H 与$A^* F$ 必 $\mathscr{A}$-同构. 因此断言成立.

令 $h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$为 A 在子空间 $u=0$ 上的限制 $v\mapsto A(v,0)$. 因为 H 在 $u=0$ 上的限制为 G,因此 G $\mathscr{A}$-同构于 $h^* F$. 按照定义 9.1.3(i),F 是f_0 的通用开折.

§9.3 应用:一类特殊的 $\Sigma^{1,\cdots,1,0}$型奇点

在§2.5 中引入了 Thom 一阶奇点集,而在第七章讨论平面到平面的 C^∞ 映射的奇点时,介绍了二阶奇点集. 作为折叠与尖点的自然推广,本节引入一类特殊的高阶奇点,为后面一般地讨论 Thom-Boardman 奇点提供具体范例.

设 $F:(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^{n+1},0)$为 C^∞ 映射芽,它在点 $0\in\mathbb{R}^{n+1}$的秩为 $n(n\geqslant 1)$. 选取源空间与靶空间的适当坐标系$(x_1,\cdots,x_n,y)$和$(X_1,\cdots,X_n,Y)$,使得这一映射芽表示为

$$F:\begin{cases}X_1=x_1,\\ \quad\cdots\cdots\\ X_n=x_n,\\ Y=f(x_1,\cdots,x_n,y),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f(0)=0,\dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=0$(请读者参照引理 7.1.1 补述理由). 以下假定 F 具有形式(1),此时 F 的一阶奇点集

$$\Sigma^1(F)=\{(x_1,\cdots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \dim\mathrm{Ker}\,DF(x_1,\cdots,x_n,y)=1\}$$

$$= \{(x_1,\cdots,x_n,y)\in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,\cdots,x_n,y) = 0\}.$$

定义 9.3.1 原点叫做 F 的 $\Sigma^{1,\cdots,1,0}$ 型奇点(该符号包含 r 个 1($1\leqslant r\leqslant n+1$),简记为 $\Sigma^{1_r,0}$),如果下列条件被满足:

(i) $\frac{\partial f}{\partial y}(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)=\cdots=\frac{\partial^r f}{\partial y^r}(0)=0$,

(ii) 函数 $\frac{\partial f}{\partial y},\cdots,\frac{\partial^r f}{\partial y^r}$ 在点 0 处是独立的,

(iii) $\frac{\partial^{r+1} f}{\partial y^{r+1}}(0)\neq 0$.

取 $n=1$ 这一特殊情形,易见原点为折叠对应于 $r=1$,而当 $r=2$ 时,原点则为尖点,因此本定义是对平面到平面的映射的两种通有奇点(即折叠与尖点)的推广. 在描述 B. Morin 的结果之前,先对该定义作简单的几何解释.

首先,$\Sigma^1(F)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中过原点的微分子流形,其余维数为 1. 事实上,由条件(ii),在原点处的微分 $\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 不为 0,根据隐函数定理,方程 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 可局部地解出某一个变量为其余 n 个变量的 C^∞ 函数,或说 $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中余维数为 1 的超曲面,这张超曲面在原点处的法向量为 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y}(0),\cdots,\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial y}(0),\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)\right)$.

其次,$DF(0)$ 的核为直线,由 $\mathrm{d}x_1=\cdots=\mathrm{d}x_n=0$ 确定. 如果 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0)=0$,那么 $\operatorname{Ker} DF(0)$ 包含于 $\Sigma^1(F)$ 在原点的切空间内,这说明 $F|\Sigma^1(F)$ 在原点的秩为 $n-1$,从而原点属于集 $\Sigma^{1,1}(F)$ 中,这里

$$\Sigma^{1,1}(F) = \{(x_1,\cdots,x_n,y)\in \Sigma^1(F) \mid \operatorname{rank} D(F|\Sigma^1(F))(x_1,\cdots,x_n,y) = n-1\}$$

$$= \left\{ (x_1, \cdots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \right\}.$$

由条件(ii), $\mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_0 \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_0 \neq 0$, 根据隐函数定理可推出 $\Sigma^{1,1}(F)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中过原点的微分子流形,其余维数为2.考虑 F 在 $\Sigma^{1,1}(F)$上的限制 $F|\Sigma^{1,1}(F)$,用类似的方法定义 $\Sigma^{1,1,1}(F)$等等.

现陈述 B. Morin 的一个结果[58]如下:

定理 9.3.1 设 $F:(\mathbb{R}^{n+1},0)\to(\mathbb{R}^{n+1},0)$为 C^∞ 映射芽,它在点0的秩为 n.又原点为 F 的$\Sigma^{1_r,0}$型奇点,$1\leqslant r\leqslant n+1$,则 $F\mathscr{A}$-等价于下列C^∞芽:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ \quad \cdots\cdots \\ X_n = x_n, \\ Y = y^{r+1} + x_1 y^{r-1} + \cdots + x_{r-1} y. \end{cases}$$

证 因 F 在点0的秩为 n,故 $F\mathscr{A}$-等价于形式(1),即

$$X_i = x_i, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$Y = f(x_1, \cdots, x_n, y),$$

不妨仍将它记为 F,于是 F 可看作是

$$f_0:(\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0), \ y \mapsto Y = f(0,y)$$

的 n-参数开折.因原点是 F 的$\Sigma^{1_r,0}$型奇点,条件(i)和(iii)说明 f_0 作为 y 的一元函数,右等价于 y^{r+1}.由§9.1例1知,y^{r+1}的万有开折是

$$G:(\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^{r-1}\times\mathbb{R},0),$$

$$(u,y) \mapsto (u, y^{r+1} + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_{r-1} y),$$

这里 $u=(u_1,\cdots,u_{r-1})\in\mathbb{R}^{r-1}$.

据通用开折定理，F 作为 f_0 的 n-参数开折 $\mathscr{A}$-同构于 h^*G，这里 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^{r-1},0)$，$x\mapsto h(x)=u$. 改记 $u_i=u_i(x)$ $(i=1,\cdots,r-1)$，有

$$H=h^*G:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^n\times R,0),$$
$$(x,y)\mapsto(x,y^{r+1}+u_1(x)y^{r-1}+\cdots+u_{r-1}(x)y).$$

令 $Y=y^{r+1}+u_1(x)y^{r-1}+\cdots+u_{r-1}(x)y$，则

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_0=\{(r+1)\mathrm{d}y^r+(r-1)[y^{r-2}\mathrm{d}u_1+u_1\mathrm{d}y^{r-2}]+\cdots+\mathrm{d}u_{r-1}\}\bigg|_0$$
$$=\mathrm{d}u_{r-1}.$$

一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^i Y}{\partial y^i}\right)\bigg|_0=\mathrm{d}u_{r-i},\quad 1\leqslant i\leqslant r-1,$$

又

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial^r Y}{\partial y^r}\right)\bigg|_0=(r+1)!\mathrm{d}y.$$

由定义 9.3.1 中条件(ii)，

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\bigg|_0\wedge\mathrm{d}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)\bigg|_0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\left(\frac{\partial^r Y}{\partial y^r}\right)\bigg|_0$$
$$=(r+1)!\mathrm{d}u_{r-1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_1\wedge\mathrm{d}y\neq0,$$

因此条件(ii)等价于微分 $\mathrm{d}u_1,\cdots,\mathrm{d}u_{r-1}$ 在点 0 处是线性无关的.
又

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}u_1\\ \mathrm{d}u_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}u_{r-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{bmatrix},$$

说明矩阵

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{1\leqslant i\leqslant r-1\\1\leqslant j\leqslant n}}$$

在点 0 的秩为 $r-1$. 而

$$\dot{H}_j(y) = \frac{\partial Y}{\partial x_j}(0,y) = \frac{\partial u_1}{\partial x_j}(0)\cdot y^{r-1} + \cdots + \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_j}(0)\cdot y,$$

其中 $j=1,\cdots,n$,因此

$$\begin{bmatrix}\dot{H}_1\\ \vdots\\ \dot{H}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_1}(0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(0) & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(0) & \cdots & \frac{\partial u_{r-1}}{\partial x_n}(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^{r-1}\\ \vdots\\ y\end{bmatrix}.$$

上式中矩阵的秩为 $r-1$,不失一般性,假定由前 $r-1$ 行组成的 $(r-1)\times(r-1)$ 子矩阵是满秩的,那么 $\dot{H}_1,\cdots,\dot{H}_{r-1}$ 是独立的. 由于 G 是 y^{r+1} 的万有开折,f_0 与 y^{r+1} 右等价,因此可导出

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \mathbb{R}\{\dot{H}_1,\cdots,\dot{H}_{r-1}\} = \varepsilon_y,$$

从而 H 是 f_0 的通用开折. 再据定理 9.1.2,F 必 $\mathscr{A}$-等价于 y^{r+1} 的万有开折 G 的常值开折(含 $n-r+1$ 个参数),而这正是我们所要证的.

§9.4 在接触等价下的形变

9.4.1 $\mathscr{K}$-横截形变

设 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 是 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 的 r-参数形变,因而 $f(0,x)=f_0(x)$. 将形变 f 设想为"芽" $\alpha:(\mathbb{R}^r,0)\to(\varepsilon(n,p),f_0)$, $u\mapsto f_u\,(f_u(x)=f(u,x))$,那么映射 α 在点

$0\in\mathbb{R}^r$和 $T_e\mathscr{K}(f_0)$(群$\mathscr{K}$作用下于 f_0 处的切空间)相"横截"形式地描述为

$$T_0\alpha(\mathbb{R}^r) + T_e\mathscr{K}(f_0) = T_{f_0}\varepsilon(n,p),$$

其中 $T_o\alpha$ 表示映射α 在点 $0\in\mathbb{R}^r$ 的"微分",我们把它理解为线性映射$\mathbb{R}^r\to\varepsilon(n,p)$,该映射将$\mathbb{R}^r$ 的标准基向量映为$\left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_{u=0},\cdots,$ $\left.\frac{\partial f}{\partial u_r}\right|_{u=0}$,这里 $u_1,\cdots,u_r$ 为$\mathbb{R}^r$ 的坐标. 简记$\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_{u=0}$为$\dot{f}_i$,因而 $T_0\alpha(\mathbb{R}^r)=\mathbb{R}\{\dot{f}_1,\cdots,\dot{f}_r\}$为 $\varepsilon(n,p)$的实向量子空间. 这启发我们给出下列定义.

定义 9.4.1 设 $f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数形变. 若

$$T_e\mathscr{K}(f_0) + \mathbb{R}\{\dot{f}_1,\cdots,\dot{f}_r\} = \varepsilon(n,p),$$

其中$\dot{f}_i(x)=\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)(i=1,\cdots,r)$,则 f 称为f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变.

由该定义立即得到:$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$容有 $\mathscr{K}$-横截形变当且仅当 f_0 具有有限 $\mathscr{K}$-余维.

设 $\mathrm{Codim}(f_0,\mathscr{K})=c$,并且 $f_1,\cdots,f_c$ 是 $T_e\mathscr{K}(f_0)$在 $\varepsilon(n,p)$中的补空间的基,即

$$T_e\mathscr{K}(f_0) + \mathbb{R}\{f_1,\cdots,f_c\} = \varepsilon(n,p),$$

那么

$$f(u,x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{c} u_i f_i(x)$$

是 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变,带有 c 个参数 $u_1,\cdots,u_c$.

实际上,人们感兴趣的是秩为 0 的映射芽 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变与开折(见第十二章). 将 $\varepsilon(n,p)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$,且 $\varepsilon_n^{\times p}=\mathbb{R}^p\oplus\mathscr{M}_n^{\times p}$.

当 $\gamma k_0 f_0 = 0$ 时，易见 $T_e\mathscr{K}(f_0)$ 是 $\mathscr{M}_n^{\times p}$ 的向量子空间. 设 $f_1, \cdots, f_r$ 为 $T_e\mathscr{K}(f_0)$ 在 $\mathscr{M}_n^{\times p}$ 中的补空间的基，并记 $\mathbb{R}^p$ 的基为 $e_1, \cdots, e_p$，则 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变 f 可写为

$$f(u, w, x) = -\sum_{i=1}^{p} w_i e_i + f_0(x) + \sum_{j=1}^{r} u_j f_j(x),$$

"－"号的选取出于几何考虑，待后说明.

寻求映射芽的 $\mathscr{K}$-横截形变与计算 $\mathscr{K}$-余维数关系密切. 我们在 §8.5 中讨论了映射芽的 $\mathscr{K}$-余维数的计算，现就该节中的诸例给出它们的 $\mathscr{K}$-横截形变.

例 1 由 $f_0(x, y) = (x^2, y^2)$ 定义的芽 $f_0:(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ 具有 $\mathscr{K}$-余维数 4. $T_e\mathscr{K}(f_0)$ 在 $\varepsilon(2,2)$ 中的补空间的基为 $(1,0)$, $(0,1)$, $(y,0)$ 和 $(0,x)$，因此 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变 $f:(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ 的分量为

$$f_1 = x^2 + u_1 y - w_1, \qquad f_2 = y^2 + u_2 x - w_2.$$

例 2 设整数 $t \geqslant 1$, C^∞ 映射芽

$$f_0:(\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0),\ f_0(x) = (0, \cdots, 0, x^{t+1})$$

的 $\mathscr{K}$-余维数 $c = pt + p - 1$, $T_e\mathscr{K}(f_0)$ 在 $\varepsilon(1, p)$ 中的补空间的基由诸 $(0, \cdots, x^k, \cdots, 0)$ $(0 \leqslant k \leqslant t)$ 组成，但除去 $(0, \cdots, 0, x^t)$. 于是 f_0 的 $\mathscr{K}$-横截形变 $f:(\mathbb{R}^c \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 用分量表示为

$$\begin{cases} f_1 = -w_1 + u_{11}x + \cdots + u_{1,t-1}x^{t-1} + u_{1,t}x^t, \\ f_2 = -w_2 + u_{21}x + \cdots + u_{2,t-1}x^{t-1} + u_{2,t}x^t, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p = -w_p + u_{p1}x + \cdots + u_{p,t-1}x^{t-1} + x^{t+1}. \end{cases}$$

例 3 设 C^∞ 芽 $f_0:(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ 定义为 $f_0(x, y) = (xy, x^a \pm y^b)$，其中整数 $a, b \geqslant 3$，则 $\mathrm{Codim}(f_0, \mathscr{K}) = a + b$, $T_e\mathscr{K}(f_0)$ 在

$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)(1\leqslant i\leqslant a-1)$和$(0,y^j)(1\leqslant j\leqslant b-1)$,因此$\mathscr{K}$-横截形变$f:(\mathbb{R}^{a+b}\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$的分量为

$$f_1 = xy - w_1,$$

$$f_2 = x^a \pm y^b + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{b-1} v_j y^j - w_2.$$

例 4 芽$f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2+y^2,x^a)$的$\mathscr{K}$-余维数为$2a$,整数$a\geqslant 3$. $T_e\mathscr{K}(f_0)$在$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$.因此$\mathscr{K}$-横截形变$f:(\mathbb{R}^{2a}\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$的分量为

$$f_1 = x^2 + y^2 - w_1,$$

$$f_2 = x^a + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{i=1}^{a-1} v_i x^{i-1} y - w_2.$$

9.4.2 $\mathscr{K}$-通用形变

对于映射芽的横截形变这一代数概念,我们希望用"通用性"几何概念来描述.

定义 9.4.2 设$f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$C^\infty$映射芽,$f,g:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$f_0$的$r$-参数形变.如果存在$(\mathbb{R}^n,0)$上的恒同映射芽的$r$-参数开折$\phi:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$,使得

$$\phi^*(f^*\mathscr{M}_p) = g^*\mathscr{M}_p,$$

则称f与g是$\mathscr{K}$-同构的.

根据命题8.4.1,若形变f与g是$\mathscr{K}$-同构的,则f和g作为映射芽必$\mathscr{K}$-等价.

定义 9.4.3 设$f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为$f_0\in\varepsilon^0(n,p)$的$r$-参数形变.假定$h:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$为$C^\infty$芽,定义$h^*f:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为

$$h^*f(v,x) = f(h(v),x),$$

称为由 h 诱导的 f 的拉回,并且 h 叫做参数变换.显然 h^*f 是 f_0 的 s-参数形变.

定义 9.4.4 设 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$. f_0 的形变 f 叫做 $\mathscr{K}$-通用形变,如果 f_0 的任意其他形变 g 皆 $\mathscr{K}$-同构于 f 的某一拉回 h^*f,其中 h 是从 g 的参数空间到 f 的参数空间的参数变换.

现在叙述 $\mathscr{K}$-通用形变定理如下:

定理 9.4.1 设 $f:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 $f_0 \in \varepsilon^0(n,p)$ 的 r-参数形变,则 f 是 $\mathscr{K}$-通用形变当且仅当 f 为 $\mathscr{K}$-横截形变.

定理 9.1.1 和 9.4.1 统称为通用性定理.前者是在群 $\mathscr{A}$ 作用意义下讨论映射芽的开折,后者是就接触等价即在群 $\mathscr{K}$ 作用意义下,对映射芽的形变而言.并且映射芽的形变与开折有着紧密联系.事实上,定理 9.1.1 可改用形变的方式来叙述,定理 9.4.1 也可代之以开折的语言来表达.不仅如此,这两个定理的证明方法也完全类似,因此我们省去定理 9.4.1 的证明而留给读者练习.此外,读者可参照定理 9.1.2 写出 $\mathscr{K}$-通用形变的相应结论并加以证明.

第十章　映射芽的有限决定性

§10.1　引　　言

奇点理论中的一种基本思想是“较好”的光滑映射芽的局部拓扑性质由它们的 Taylor 级数中的有限多个项所决定. 说得确切些，在光滑映射芽$(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$所成之集 $\varepsilon^0(n,p)$中引入等价关系 E，我们说 $f\in\varepsilon^0(n,p)$是 r-E-决定的(r 为正整数)，是指对任意的 $g\in\varepsilon^0(n,p)$，如果 g 和 f 在 $0\in\mathbb{R}^n$ 处具有相同的 r 阶 Taylor 多项式，那么 g 和 f 是 E-等价的. 假若对某一 $r<\infty$，f 是 r-E-决定的. 那么 f 叫做有限 E-决定的. 这样的 r 如果存在，显然有无限多个，它们中的最小者叫做 f 的决定性阶数.

分析光滑映射芽在什么条件下是有限决定的，并且对其决定性阶数进行估计关系到奇点理论中最重要的局部特性. 而最具研究意义的等价关系是通过下列五类群对 $\varepsilon^0(n,p)$的作用来定义的，这五类局部微分同胚群曾在第八章讨论过，它们是右等价群 $\mathscr{R}$，左等价群 $\mathscr{L}$，左右等价群 $\mathscr{A}$ 以及接触等价群 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{K}$. Mather 就这 5 类群给出了光滑映射芽有限决定的必要充分条件，刻画了有限决定性的特征. 他的系列论文为映射芽的有限决定性理论的深入发展奠定了理论基础，使之成为奇点理论中十分活跃的研究专题.

回忆第三章我们曾对函数芽研究了 $\mathscr{R}$-决定性. 定理 3.3.1 告诉我们，经过 $f\in\varepsilon_n$ 的 $\mathscr{R}$-轨道 $\mathscr{R}\cdot f$ 在 f 处的切空间 $\mathscr{M}_n\cdot J(f)$若在 ε_n 中的余维有限，则 f 是 $\mathscr{R}$-决定的. 这正好反映了映射芽有限决定的特征. §10.3 将对上述 5 类群并且就一般的映射芽进行讨论，在这一节里将证明 Mather 关于有限决定性的著名结果，并且是它的一个改进形式. 为此需作一些准备. §10.2 对彼此相接近

的映射芽，比较它们相应的切空间，所得的诸结果称为逼近引理．然而人们对映射芽有限决定性的研究，更感兴趣的是 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{K}$ 决定性，§10.4 讨论了 $\mathscr{A}_k$-决定性，它是 $\mathscr{A}$-决定性的一种自然推广．由于对非稳定的有限决定的映射芽的阶数，按照 Mather 的方法进行估计，有时很不理想，因此 §10.5 提供的一些方法便于有效地估计决定性阶数．作为决定性阶数的推广，还考虑了决定性范围，在 §10.6 中对决定性范围给出了基本估计．最后指出，在 $\varepsilon^0(n, p)$ 中引入等价关系不只限于前面所说的 5 种，§10.7 介绍了一种新的等价关系，并讨论了有限决定性问题．

§10.2 逼近引理

本节的目的是说明 $\varepsilon^0(n, p)$ 中的二映射芽 f 和 g 如果彼此相差的只是"高阶"项，则其相应的切空间具有相同的接近程度．为表达这一事实，我们将秩为 p 的自由 ε_n-模 $V(f)$ 与 $V(g)$ 等同，这只要通过将它们的自由基 $\left\{wf\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$，$\left\{wg\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$ 等同而将 $V(f)$ 和 $V(g)$ 作为 $\varepsilon_n^{\times p}$ 来等同．

引理 10.2.1 设 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为二映射芽，具有相同的 l-导网，则

(i) $f^*\phi - g^*\phi \in \mathscr{M}_n^{l+1}, \quad \forall \phi \in \varepsilon_p$,

(ii) $tf(\xi) - tg(\xi) \in \mathscr{M}_n^l \cdot V(f), \quad \forall \xi \in V(\mathbb{R}^n)$,

(iii) $wf(\eta) - wg(\eta) \in \mathscr{M}_n^{l+1} \cdot V(f), \quad \forall \eta \in V(\mathbb{R}^p)$.

证 (i) 由推论 1.1.1 可推得．

(ii) 设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，$\{y_1, \cdots, y_p\}$ 分别为 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 和 $(\mathbb{R}^p, 0)$ 的局部坐标系．因为 tf 和 tg 均为 ε_n-模同态，因此只需对 $\xi = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 证明(ii)即可．

对 $i = 1, \cdots, n$，有

$$tf\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-tg\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial(y_j\circ f-y_j\circ g)}{\partial x_i}\cdot wf\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

依假设，$(y_j\circ f-y_j\circ g)\in\mathcal{M}_n^{l+1}(j=1,\cdots,p)$，因此

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(y_j\circ f-y_j\circ g)\in\mathcal{M}_n^{l},\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,p$$

并且

$$tf\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)-tg\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\in\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f),\ i=1,\cdots,n.$$

(iii) 设 $\eta\in V(\mathbb{R}^p)$，则 η 可表为 $\eta=\sum_{j=1}^{p}\eta_j\frac{\partial}{\partial y_j}$（$\eta_j\in\varepsilon_p$，$j=1,\cdots,p$），有

$$wf(\eta)-wg(\eta)=\sum_{j=1}^{p}(f^*\eta_j-g^*\eta_j)\cdot wf\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

据(i)，$f^*\eta_j-g^*\eta_j\in\mathcal{M}_n^{l+1}$，故

$$wf(\eta)-wg(\eta)\in\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f).$$

注 本引理还可推广，例如(ii)可换为

(ii)′ $tf(\xi)-tg(\xi)\in R\cdot\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f)$，$\forall\xi\in R\cdot V(\mathbb{R}^n)$，且 R 为 ε_n 的任意子环.

引理 10.2.2 在引理 10.2.1 的条件下，有

(i) $T_e\mathcal{R}(f)+\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(f)=T_e\mathcal{R}(g)+\mathcal{M}_n^{l}\cdot V(g)$，

$$T\mathcal{R}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{R}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g).$$

(ii) $T\mathcal{C}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{C}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g)$.

(iii) $T_e\mathcal{L}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T_e\mathcal{L}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g)$，

$$T\mathcal{L}(f)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathcal{L}(g)+\mathcal{M}_n^{l+1}\cdot V(g).$$

(iv) 用 $\mathcal{G}$ 表 5 类群 $\mathcal{R}$，$\mathcal{C}$，$\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{A}$ 中任意一类，则有

$$T\mathscr{G}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)=T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g),$$

这里 $T\mathscr{G}(f)$表轨道 $\mathscr{G}\cdot f$ 在 f 处的切空间.

证 据引理 10.2.1 细节由读者补述.

现在对单参数族映射芽,讨论类似的逼近引理. 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$是一个$\mathbb{R}$-水平保持的 C^∞ 映射芽,$\{t,x_1,\cdots,x_n\}$和$\{t,y_1,\cdots,y_p\}$分别为$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$与$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$上的局部坐标系. 我们可引入沿 F 的向量场芽$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to T(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$的概念,但更感兴趣的是沿 F 的"$\mathbb{R}$-水平保持"的向量场芽,即要求沿 F 的向量场芽在$T(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)=T\mathbb{R}\oplus T\mathbb{R}^p$ 中沿$\mathbb{R}(t)$的分量为0. 将沿 F 的$\mathbb{R}$-水平保持的向量场芽全体记作 $\psi(F)$, 它是一个秩为 p 的自由$\varepsilon_{t,x}$-模,$\dfrac{\partial}{\partial y_1}\circ F,\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_p}\circ F$ 为 $\psi(F)$的一组 $\varepsilon_{t,x}$-基. 借助这组基,将 $\psi(F)$等同于 $\varepsilon_{t,x}^{\times p}$. 特别,$\psi(1_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)})$和$\psi(1_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)})$分别简记为 $\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$与 $\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$.

对于$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 F,依定义 8.2.6,有 tF 与 wF,将其源空间与靶空间作限制,可给出 $\varepsilon_{t,x}$-同态 $tF:\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\to\psi(F)$和关于 F^* 的同态 $wF:\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\to\psi(F)$.

令

$$\begin{aligned}
T\mathscr{R}(F)&=tF(\mathscr{M}_n\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)),\\
T\mathscr{L}(F)&=wF(\mathscr{M}_p\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),\\
T\mathscr{C}(F)&=F^*\mathscr{M}_p\cdot\psi(F),\\
T\mathscr{A}(F)&=T\mathscr{R}(F)+T\mathscr{L}(F),\\
T\mathscr{K}(F)&=T\mathscr{R}(F)+T\mathscr{C}(F).
\end{aligned}$$

定义 10.2.1 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0)$为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,因而 F 可表示为$F(t,x)=(t,f_t(x))$, $(t,x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)$.

(i) 定义$\partial\cdot F\in\psi(F)$为$(1,\partial\cdot F)=tF\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial t},0\right)\right)$. 显然它对

应于$\frac{\partial}{\partial t}f_t$.

(ii) 若 F 为过 f 的光滑道路芽(此时 $f_0=f$),规定 $\partial_0 F\in V(f)$为 $\partial_0 F(x)=\partial\cdot F(0,x), x\in(\mathbb{R}^n, 0)$. 因而它对应于$\left.\frac{\partial}{\partial t}f_t\right|_{t=0}$.

用坐标来表示,设$\{y_1, \cdots, y_p\}$为$(\mathbb{R}^p, 0)$上的局部坐标系,则

$$\partial\cdot F=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial(y_i\circ F)}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\circ F.$$

引理 10.2.3 设 $F,G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,满足条件 $G-F\in\mathcal{M}_n^l\psi(F), l\geqslant 1$,则

(i) $F^*\phi-G^*\phi\in\mathcal{M}_n^l\varepsilon_{1+n}\quad\forall\phi\in\varepsilon_{1+p}$,

(ii) $tF(\xi)-tG(\xi)\in\mathcal{M}_n^{l-1}\cdot\psi(F)\quad\forall\xi\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

(iii) $wF(\eta)-wG(\eta)\in\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(F)\quad\forall\eta\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$,

(iv) 对每一$\mathcal{G}$, $T\mathcal{G}(F)+\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(F)=T\mathcal{G}(G)+\mathcal{M}_n^l\cdot\psi(G)$.

注 为使上列诸式有意义,故将 $\psi(F)$与 $\psi(G)$的自由基$\left\{wF\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$, $\left\{wG\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$等同而将$\psi(F)$和 $\psi(G)$作为 $\varepsilon_{1+n}^{\times p}$等同.

证 (i) $G-F=(0, y_1\circ G-y_1\circ F, \cdots, y_p\circ G-y_p\circ F)$. 由假设 $G-F\in\mathcal{M}_n^l\psi(F)$, 有 $y_j\circ G-y_j\circ F\in\mathcal{M}_n^l\cdot\varepsilon_{1+n}(j=1, \cdots, p)$. 据定理 1.1.3,$y_j\circ G-y_j\circ F$ 在点$(t, 0)(\forall t\in(\mathbb{R}, 0))$处关于 x 的阶数小于l 的所有偏导数均为0. 由此可推出:对于任意的$\phi\in\varepsilon_{1+p}$,$G^*\phi-F^*\phi=\phi\circ G-\phi\circ F$ 在点$(t, 0)$(对任意 $t\in(\mathbb{R}, 0)$)处关于 x 的阶数小于l 的所有偏导数均为0. 再一次应用定理 1.1.3,便得到 $G^*\phi-F^*\phi\in\mathcal{M}_n^l\cdot\varepsilon_{1+n}$.

(ii)与(iii)的证明类似于引理 10.2.1 中的(ii)和(iii),并且(iv)的证明与引理 10.2.2 相似,请读者自己验证.

该引理的更一般形式是

引理 10.2.4 在引理 10.2.3 的条件下,有

(i) $F^*\phi - G^*\phi \in \mathcal{M}_n^{l+k}\cdot\varepsilon_{1+n} \quad \forall\,\phi\in\mathcal{M}_p^k\cdot\varepsilon_{1+p},\ k\geqslant 0$,

(ii) $tF(\xi) - tG(\xi)\in R\cdot\mathcal{M}_n^{l-1}\cdot\psi(F) \quad \forall\,\xi\in R\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,
R 为 ε_{1+n}的任意子环,

(iii) $wF(\eta) - wG(\eta)\in\mathcal{M}_n^{l+k}\cdot\psi(F) \quad \forall\,\eta\in\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$,
$k\geqslant 1$.

$$F_0:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,0),$$

$$(t,x)\mapsto F_0(t,x)=(t,f(x))$$

是$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽的最简单例子,其中 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞映射芽.

引理 10.2.5 对每一个 $\mathcal{G}$,

$$T\mathcal{G}(F_0)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)\Leftrightarrow T\mathcal{G}(f)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot V(f).$$

证 $\Rightarrow$ 易见 $\psi(F_0)/\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)$同构于 $V(f)$,且在这同构对应下,$T\mathcal{G}(f)\cong T\mathcal{G}(F_0)/T\mathcal{G}(F_0)\cap\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)$. 而 $T\mathcal{G}(F_0)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)$,故

$$T\mathcal{G}(f)\cong\frac{T\mathcal{G}(F_0)+\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}{\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}\supset\frac{\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F_0)+\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}{\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)}$$

$$\cong\mathcal{M}_n^r\cdot\left(\psi(F_0)\Big/\mathcal{M}_t\cdot\psi(F_0)\right)\cong\mathcal{M}_n^r\cdot V(f).$$

$\Leftarrow$ 反之,若 $T\mathcal{G}(f)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot V(f)$,则 $V(f)\big/T\mathcal{G}(f)$是一个有限维实向量空间. 选取有限个 $g_i\in V(f)\,(i=1,\cdots,s)$作为 $V(f)\big/T\mathcal{G}(f)$的一组生成元. 将诸 g_i 扩张,使之与 t 无关而成为 $\psi(F_0)$中的成员,这是可能的. 因为我们可以将 $V(f)=\varepsilon_x\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\circ f\right\}$等同于$\varepsilon_x\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\circ F_0\right\}$,且 ε_x 等同于$\varepsilon_{t,x}$中的一子环(为

此将 $\alpha\in\varepsilon_x$ 等同于 $\alpha\in\varepsilon_{t,x}$,后者定义为 $\alpha(t,x)=\alpha(x)$). 因为

$$V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)\cong\psi(F_0)\Big/(\mathscr{M}_t\cdot\psi(F_0)+T\mathscr{G}(F_0)),$$

因此上式右边作为实向量空间由诸 g_i 生成. 令 $A=\psi(F_0)\Big/T\mathscr{G}(F_0)$, 则

$$\mathrm{A}\Big/\mathscr{M}_t\cdot\mathrm{A}\cong\psi(F_0)\Big/(\mathscr{M}_t\cdot\psi(F_0)+T\mathscr{G}(F_0)).$$

据 Malgrange 预备定理,A 作为 ε_t-模是有限生成的,从而由 Nakayama 引理,$A=\varepsilon_t\{g_1,\cdots,g_s\}$. 注意到

$$\mathscr{M}_x^r\cdot\left(V(f)\Big/T\mathscr{G}(f)\right)=\frac{\mathscr{M}_x^r\cdot V(f)+T\mathscr{G}(f)}{T\mathscr{G}(f)}=0,$$

因此

$$\mathscr{M}_x^r\cdot\left(\mathrm{A}\Big/\mathscr{M}_t\cdot\mathrm{A}\right)=0,$$

从而有 $\mathscr{M}_x^r\cdot\mathrm{A}\subset\mathscr{M}_t\cdot\mathrm{A}$ 及 $\mathscr{M}_x^r\cdot\mathrm{A}=0$, 于是 $\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F_0)\subset T\mathscr{G}(F_0)$.

§10.3　无穷小判别法

本节仍用 $\mathscr{G}$ 表示群 $\mathscr{R},\mathscr{C},\mathscr{K},\mathscr{L}$ 及 $\mathscr{A}$ 中的任意一个.

定义 10.3.1　设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,r 为正整数. 如果 $\varepsilon^0(n,p)$ 中与 f 具有相同 r-导网的芽 g 必 $\mathscr{G}$-等价于 f,那么 f 叫做 r-$\mathscr{G}$-决定的.

具有上述性质的正整数 r 中的最小者叫做 f 的决定性阶数.

10.3.1　Mather 著名结果的陈述

我们陈述 Mather 关于 C^∞ 映射芽有限决定性的无穷小判别法,下面的定理是 Gaffney 提供的一个改进形式(见文献[19]或[65]).

定理 10.3.1 对每一个 $f,\mathscr{G}$,下列诸断言是等价的:

(b) f 是有限 $\mathscr{G}$-决定的,

(t) 对某一自然数 k, $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)$,

(d) $\mathrm{d}(f,\mathscr{G})=\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}_n\cdot V(f)\big/T\mathscr{G}(f)<\infty$,

(d′) $\mathrm{d}_e(f,\mathscr{G})=\dim_{\mathbb{R}}V(f)\big/T_e\mathscr{G}(f)<\infty$.

更确切地,

(i) 若 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的,则 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$,

(ii) 若 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$, 则 f 是 $(\varepsilon r+1)$-$\mathscr{G}$-决定的,

(iii) 若 $\mathrm{d}(f,\mathscr{G})=d<\infty$,则 $T\mathscr{G}(f)\supset\mathscr{M}_n^{(d+1)^\varepsilon}\cdot V(f)$, 其中当 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$ 时,$\varepsilon=1$;当 $\mathscr{G}=\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{A}$ 时,$\varepsilon=2$.

值得注意的是,(i)、(ii)、(iii)分别导出蕴涵关系(b)⇒(t),(t)⇒(b),(d)⇒(t). 而(t)⇒(d)是平凡的,因为 $\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)$ 具有有限余维,即 $\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}_n\cdot V(f)\big/\mathscr{M}_n^k\cdot V(f)<\infty$.

10.3.2 几个引理

为证明定理 10.3.1,首先证明下列几个引理.

引理 10.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,C 为有限生成的 ε_n-模,A 为有限生成的 ε_p-模.

(1) 若 B 是 C 的有限生成 ε_n-子模,合于 $A+f^*\mathscr{M}_p\cdot B\supset B$, 则 $A\supset B$.

(2) 若 M 是 ε_n 中的有限生成理想,$A\subset f^*\mathscr{M}_p\cdot C$,且 $M\cdot C\subset A+M^2\cdot C$,则 $M\cdot C\subset A$.

(3) 若 $\dim_{\mathbb{R}}(C\big/A+\mathscr{M}_n^{d^2+d}\cdot C)\leqslant d$ 且 $A\subset f^*\mathscr{M}_p\cdot C$,则 $\mathscr{M}_n^{d^2}\cdot C\subset A$.

证 (1) 因 A 为有限生成的 ε_p-模,$\dim_{\mathbb{R}}A\big/\mathscr{M}_p\cdot A<\infty$. 而 $B\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot B$ 可表为 $A\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot A$ 的商,因此 $\dim_{\mathbb{R}}B\big/f^*\mathscr{M}_p\cdot B<$

∞. 依 Malgrange 预备定理, B 作为 ε_p- 模是有限生成的.

由条件 $A+f^*\mathcal{M}_p\cdot B\supset B$ 可导出 $f^*\mathcal{M}_p\cdot\frac{B}{A\cap B}\supset\frac{B}{A\cap B}$, 据 Nakayama 引理, $B\big/A\cap B=0$, $B\subset A$.

(2) 将 Nakayama 引理应用于

$$M^2\cdot C\subset M\cdot A+M^3\cdot C,$$

可得到 $M^2\cdot C\subset M\cdot A$(注意 $M^2\cdot C\big/M^2\cdot C\cap M\cdot A$ 是 ε_n 上的有限生成模), 于是

$$M^2\cdot C\subset M\cdot f^*\mathcal{M}_p\cdot C,$$

将它代入 $M\cdot C\subset A+M^2\cdot C$, 得

$$M\cdot C\subset A+f^*\mathcal{M}_p\cdot(M\cdot C),$$

据(1), $M\cdot C\subset A$.

(3) 用 ε_n- 模 $\varepsilon_n\cdot A$ 代替 A 不影响假设条件. 又

$$\dim_{\mathbb{R}}C\big/(A+\mathcal{M}_n^{d+1}\cdot C)\leqslant\dim_{\mathbb{R}}C\big/(A+\mathcal{M}_n^{d^2+d}\cdot C)\leqslant d,$$

据推论 3.1.2,

$$\mathcal{M}_n^d\cdot C\subset\varepsilon_n\cdot A\subset f^*\mathcal{M}_p\cdot C$$

(后一包含关系用到假设条件). 令 $B_k=A+\mathcal{M}_n^{kd}\cdot C, 1\leqslant k\leqslant d+1$. 由假设, 诸子模 B_k 不可能全不同. 若对某一 $k\leqslant d$, $B_k=B_{k+1}$, 则

$$\mathcal{M}_n^{kd}\cdot C\subset A+\mathcal{M}_n^{(k+1)d}\cdot C\subset A+f^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^{kd}\cdot C,$$

据(1), $\mathcal{M}_n^{kd}\cdot C\subset A$, $k\leqslant d$, 故结论成立.

引理 10.3.2 设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$ 是 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽, 因而可表示为 $F(t, x)=(t, f_t(x))$, 则每一 $f_t(t\in(\mathbb{R}, 0))$ 具有相同的 r-导网 $\Leftrightarrow\partial\cdot F\in\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F)$.

证 设$\{t, y_1, \cdots, y_p\}$是$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$上的局部坐标系，则

$$\partial \cdot F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \circ F,$$

于是

$$\partial \cdot F \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \psi(F) \Leftrightarrow \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \varepsilon_{1+n}, \ i = 1, \cdots, p$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^j (y_i \circ F)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}\right) = 0, \ \forall j \leqslant r,$$

$$1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^j (y_i \circ F)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} \text{ 与 } t \text{ 无关}, t \in (\mathbb{R}, 0),$$

$$\forall j \leqslant r, 1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n$$

$\Leftrightarrow$ 每一 $f_t(t \in (\mathbb{R}, 0))$ 的 r-导网都相同.

引理 10.3.3 设 $f \in \varepsilon^0(n, p)$. $\varepsilon^0(n, p)$中与 f 具有相同 r-导网的映射芽所成之集在 f 处的切空间为 $\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f)$.

证 设过 f 的光滑道路芽 F 如引理 10.3.2 中所示，且 F 满足条件：每一 f_t 具有与 f 相同的 r-导网. 据引理 10.3.2，$\partial \cdot F \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \psi(F)$，因而 $\partial_0 F \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f)$.

反之，任取 $\sigma \in \mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f)$. 设 $\sigma = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f$，依下法构作一条过 f 的光滑道路芽 F. 令 $F: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, 0)$ 定义为

$$F(t, x) = (t, f_t(x)),$$

$$y_i \circ f_t(x) = y_i \circ f(x) + t \cdot \sigma_i(x),$$

易见每一 f_t 具有与 f 相同的 r-导网，$t \in (\mathbb{R}, 0)$，并且 $\partial_0 F = \sigma$.

特别,它可应用于 $r=0$ 的情形,因而 $\varepsilon^0(n, p)$在 f 处的切空间为 $\mathscr{M}_n\cdot V(f)$.

注 从上述证明可知,$V(f)$的成员和过 f 的光滑道路芽的等价类成一一对应,后者的等价关系定义为:$F\sim G\Leftrightarrow\partial_0 F=\partial_0 G$.

最后概述有关导网空间的某些事实. 映射芽空间 $\varepsilon(n, p)$作为实向量空间是无穷维的,可以赋予 Fréchet 流形结构. 然而对于有限维流形成立的许多重要定理,例如反函数定理及隐函数定理,在 $\varepsilon(n, p)$中一般不成立. 为了把无穷维问题化简为有限维来处理,利用某些标准映射,例如导网运算,可将 $\varepsilon(n, p)$及群 $\mathscr{G}$ 映成有限维空间.

令 $J^l(n, p)$表 $\varepsilon^0(n, p)$中的映射芽取 l-导网所成之集. 在不引起混淆时,简记 $J^l(n, p)$为 J^l. 显然,J^l 与次数不大于 l 的多项式映射$(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$所组成的实向量空间可建立双射. 或者等价地,将每一 $z\in J^l$ 对应于它的 l 阶 Taylor 多项式所含的 $q=p\left[\binom{n+l}{l}-1\right]$个系数,这样确定的映射 $J^l\to\mathbb{R}^q$ 是一个双射. 由此可赋予 J^l 拓扑结构与微分结构,使 J^l 成为一个 C^∞ 流形,并且这 q 个系数组成J^l 的一个整体坐标系. 如果变换$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^p$ 上的坐标系,将得到 J^l 的一个新坐标系,它的每一个分量可表为原有坐标的有理函数,因此 J^l 的 C^∞ 流形结构与$\mathbb{R}^n$ 及$\mathbb{R}^p$ 上的坐标选取无关.

按照上述方式,对每一群 $\mathscr{G}$ 可定义 $\mathscr{G}^l$ 并赋予它以 C^∞ 流形结构,从而使 $\mathscr{G}^l$ 为 Lie 群,$\mathscr{G}^l$ 中的乘法运算由 $\mathscr{G}$ 中的乘法所诱导. $\mathscr{G}$ 在 $\varepsilon^0(n, p)$上的作用诱导出 $\mathscr{G}^l$ 在 $J^l(n, p)$上的作用,并且这一作用是 C^∞ 的,实际上是一个代数群作用. 于是过 $f\in\varepsilon^0(n, p)$的 $\mathscr{G}$-轨道 $\mathscr{G}\cdot f$ 映成过 $j^lf\in J^l(n, p)$的 $\mathscr{G}^l$ -轨道 $\mathscr{G}^l\cdot j^lf$. 考虑到切空间(注意 $\varepsilon^0(n, p)$在 f 处的切空间为 $\mathscr{M}_n\cdot V(f)$),定义

$$\pi^l: \mathscr{M}_n\cdot V(f)\to T_{j^lf}J^l(n, p)$$

为 $\pi^l\left(\frac{\partial}{\partial t}f_t\bigg|_{t=0}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(j^l f_t)|_{t=0}$.

显然,π^l 是实线性映射,且为满射. 据引理 10.3.3,$\mathrm{Ker}\pi^l=\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)$. 由命题 8.2.2 与 8.4.4,可进一步得出

$$T_{j^lf}(\mathscr{G}^l\cdot j^lf)=\pi^l(T\mathscr{G}(f)).$$

10.3.3 定理 10.3.1 的证明

(i) 假定 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的,那么对每一 $g\in\varepsilon^0(n,p)$,若 g 与 f 具有相同的 r-导网,则 g 与 f 是 $\mathscr{G}$-等价的,于是有

$$\{g\in\varepsilon^0(n,p)\,|\,j^rg=j^rf\}\subset\{g\in\varepsilon^0(n,p)\,|\,g\underset{\mathscr{G}}{\sim}f\}.$$

取 l-导网($l>r$),

$$\{j^lg\in J^l\,|\,j^rg=j^rf\}\subset\{j^lg\in J^l\,|\,g\underset{\mathscr{G}}{\sim}f\},$$

再在 j^lf 处取切空间,得

$$T_{j^lf}\{j^lg\in J^l\,|\,j^rg=j^rf\}\subset T_{j^lf}\{j^lg\in J^l\,|\,g\underset{\mathscr{G}}{\sim}f\}.$$

而

$$T_{j^lf}\{j^lg\in J^l\,|\,j^rg=j^rf\}=\pi^l(\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)),$$

$$\begin{aligned}T_{j^lf}\{j^lg\in J^l\,|\,g\underset{\mathscr{G}}{\sim}f\}&=T_{j^lf}(\mathscr{G}^l\cdot j^lf)\\&=\pi^l(T\mathscr{G}(f)),\end{aligned}$$

于是

$$\pi^l(\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f))\subset\pi^l(T\mathscr{G}(f)).$$

因为 $\mathrm{Ker}\pi^l=\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)$,所以

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{G}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f).\qquad(1)$$

i) 当 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$ 时,取 $l=r+1$. 由 Nakayama 引理,有

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{G}(f). \tag{2}$$

ii) 当 $\mathcal{G}=\mathcal{L}$ 时，应用引理 10.3.1，令 $C=V(f)$，$A=T\mathcal{L}(f)$，$M=\mathcal{M}_n^{r+1}$，并取 $l=2r+1$. 此时 $A=wf(\mathcal{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p))=f^*\mathcal{M}_p\cdot wf(V(\mathbb{R}^p))\subset f^*\mathcal{M}_p\cdot V(f)=f^*\mathcal{M}_p\cdot C$，而 $M\cdot C\subset A+M^2\cdot C$ 正好是

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{L}(f) + \mathcal{M}_n^{2(r+1)} \cdot V(f),$$

据引理 10.3.1(2)，

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{L}(f). \tag{3}$$

iii) 当 $\mathcal{G}=\mathcal{A}$ 时，仍应用引理 10.3.1(2). 令 $C=V(f)\big/T\mathcal{R}(f)$，显然它是有限生成的 ε_n-模. $A=T\mathcal{L}(f)\big/T\mathcal{L}(f)\cap T\mathcal{R}(f)$ 为有限生成的 ε_p-模，它是 $T\mathcal{L}(f)$ 在 C 中的像. 令 $M=\mathcal{M}_n^{r+1}$，并取 $l=2r+1$. 注意 $A\subset\dfrac{f^*\mathcal{M}_p\cdot V(f)+T\mathcal{R}(f)}{T\mathcal{R}(f)}\cong f^*\mathcal{M}_p\cdot C$，又(1)式可写为

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{R}(f) + T\mathcal{L}(f) + \mathcal{M}_n^{2(r+1)} \cdot V(f),$$

或

$$M \cdot C \subset A + M^2 \cdot C.$$

据引理 10.3.1(2)，$M\cdot C\subset A$，即

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot \left(V(f)\big/T\mathcal{R}(f)\right) \subset \frac{T\mathcal{L}(f)}{T\mathcal{L}(f)\cap T\mathcal{R}(f)} \cong \frac{T\mathcal{A}(f)}{T\mathcal{R}(f)},$$

于是

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathcal{A}(f). \tag{4}$$

(2)～(4)式合起来便是所要证的结论.

(ii) 假定 $T\mathcal{G}(f)\supset\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$. 设 $g\in\varepsilon^0(n,\ p)$ 与 f 具有

相同的l-导网,这里$l=\varepsilon r+1$,需证g与f是$\mathscr{G}$-等价的.

依引理 10.2.2(iv),有

$$T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g)=T\mathscr{G}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f),$$

将$V(g)$与$V(f)$等同,有

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(g),$$

然后利用(i)中相同的论证可得到

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g). \tag{5}$$

其次在f和g之间作线性插值,定义$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽$H:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,[0,1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,[0,1]\times 0)$为

$$H(t,x)=(t,h_t(x)),$$

$$h_t(x)=h(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x).$$

任取$a\in[0,1]$,在点$(a,0)$处有芽$h_a\in\varepsilon^0(n,p)$,$h_a(x)=(1-a)f(x)+ag(x)$,$x\in(\mathbb{R}^n,0)$. 显然h_a和f(及g)具有相同的l-导网,因而由(5)式,有

$$T\mathscr{G}(h_a)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(h_a).$$

令$F=1_{(\mathbb{R},a)}\times h_a$,其中$1_{(\mathbb{R},a)}$为$(\mathbb{R},a)$上的恒同映射芽. 据引理 10.2.5,

$$T\mathscr{G}(F)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F).$$

再令G为H在点$(a,0)$处的芽限制,$G=H|(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))$. 易见$F,G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,(a,0))$均为$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽,且

$$G(t,x)-F(t,x)=(0,(t-a)(g(x)-f(x))),$$

因而$G-F\in\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(F)$. 据引理 10.2.3(iv),

$$T\mathscr{G}(G)+\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(G)=T\mathscr{G}(F)+\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(F)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(F),$$

将 $\psi(G)$等同于 $\psi(F)$. 得

$$T\mathscr{G}(G)+\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(G)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(G).$$

类似于(i)中使用的证法,可推得

$$T\mathscr{G}(G)\supset\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\psi(G),$$

应用引理 10.3.2 于 G,有

$$\alpha\cdot G\in\mathscr{M}_n^l\cdot\psi(G).$$

下面着重对 $\mathscr{G}=\mathscr{A}$ 这一情形进行讨论. 由上面二式,可找到向量场芽 $\xi\in\mathscr{M}_n\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\eta\in\mathscr{M}_p\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$, 使得

$$\partial\cdot G=tG(\xi)+wG(\eta), \tag{6}$$

用坐标表示,令

$$-\xi(t,x)=-\xi_t(x)=\sum_{i=1}^n X_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\eta(t,y)=\eta_t(y)=\sum_{j=1}^p Y_j(t,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

则(6)式可写为

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\mathrm{D}h_t\cdot\xi_t+\eta_t\circ h_t,$$

从而由命题 8.2.1,G 是 $\mathscr{A}$ - 平凡的. 这就是说,积分向量场 ξ 与 η 分别得到$(\mathbb{R}^n,0)$和$(\mathbb{R}^p,0)$上的局部微分同胚的 1-参数族 Φ 与 Ψ,使得

$$\Psi\circ(1_{(\mathbb{R},a)}\times h_a)\circ\Phi^{-1}=G,$$

因而对于点 a 的邻域内的诸 t 值,所有 h_t 都是 $\mathscr{A}$ - 等价的. 又因为 $a\in[0,1]$是任取的,$[0,1]$是紧致的,所以 $f=h_0$ 与 $g=h_1$ 必 $\mathscr{A}$-等价. 根据上面的分析,f 是$(2r+1)-\mathscr{A}$-决定的.

至于 $\mathscr{G}=\mathscr{R},\mathscr{C},\mathscr{K}$ 或 $\mathscr{L}$ 这 4 种情形的论证,请读者补述.

(iii) 对于 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$,令

$$b_k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{M}_n \cdot V(f)}{T\mathscr{G}(f) + \mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f)}, \ k = 0, 1, \cdots, d+1,$$

则 $0=b_0\leqslant\cdots\leqslant b_k\leqslant\cdots\leqslant b_{d+1}\leqslant d$, 于是存在 $k\leqslant d$, 使得 $b_k = b_{k+1}$, 从而有

$$\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{G}(f) + \mathscr{M}_n \cdot \mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f).$$

据 Nakayama 引理,有

$$\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{G}(f), \quad k \leqslant d,$$

更不待说有 $\mathscr{M}_n^{d+1}\cdot V(f)\subset T\mathscr{G}(f)$.

对于 $\mathscr{G}=\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{A}$,证明留作练习.

§10.4 $\mathscr{A}_k$-决定性

本节讨论 $\mathscr{G}_k$-决定性,它是 $\mathscr{G}$-决定性的自然推广. 设 k 为非负整数,定义 $\mathscr{G}$ 的子群 $\mathscr{G}_k$ 如下:

$\mathscr{G}_k = \{\phi\in\mathscr{G} \mid \phi$ 与恒同映射芽具有相同的 k-导网$\}$

说得具体些,

$$\mathscr{R}_k = \{\phi:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0) \in \mathscr{R} \mid j^k\phi = j^k 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}\},$$

$$\mathscr{L}_k = \{\psi:(\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0) \in \mathscr{L} \mid j^k\psi = j^k 1_{(\mathbb{R}^p, 0)}\},$$

$$\mathscr{K}_k = \{\phi:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \in \mathscr{K} \mid j^k\phi = j^k 1_{(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p, 0)}\},$$

$$\mathscr{A}_k = \mathscr{R}_k \times \mathscr{L}_k, \quad \mathscr{C}_k = \mathscr{C} \cap \mathscr{K}_k.$$

或者利用群 $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{A}$ 等同于 $\mathscr{K}$ 的子群这一事实,有 $\mathscr{R}_k=\mathscr{R}\cap\mathscr{K}_k$, $\mathscr{L}_k=\mathscr{L}\cap\mathscr{K}_k$ 和 $\mathscr{A}_k=\mathscr{A}\cap\mathscr{K}_k$. 容易验证, $\mathscr{G}_k$ 是 $\mathscr{G}$ 的正规子群,且 $\mathscr{G}_0=\mathscr{G}$.

对应于这些子群的轨道,切空间分别为

$$T\mathscr{R}_k(f) = tf(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)),$$

$$T\mathscr{L}_k(f) = wf(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^p)),$$

$$T\mathscr{C}_k(f) = f^* \mathscr{M}_p \cdot \mathscr{M}_n^k \cdot V(f),$$

$$T\mathscr{A}_k(f) = T\mathscr{R}_k(f) + T\mathscr{L}_k(f),$$

$$T\mathscr{K}_k(f) = T\mathscr{R}_k(f) + T\mathscr{C}_k(f).$$

定义 10.4.1 设 $f \in \varepsilon^0(n, p)$. 若 $g \in \varepsilon^0(n, p)$满足 $j^r g = j^r f$, 则 $g \underset{\mathscr{G}_k}{\sim} f$. 则说 f 是r-$\mathscr{G}_k$-决定的.

换言之,如果 $\varepsilon^0(n, p)$中与 f 具有相同r-导网的映射芽所成之集包含在过 f 的轨道 $\mathscr{G}_k \cdot f$ 中,那么 f 是r-$\mathscr{G}_k$-决定的.

上一节刻画了映射芽有限 $\mathscr{G}$-决定的特征,但人们更感兴趣的是映射芽的 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{K}$ 决定性,对函数芽则考虑 $\mathscr{R}$ 决定性. 本节余下部分集中讨论 $\mathscr{A}_k$-决定性.

如定义 8.2.1 那样,可引入一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 F:$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0)$是 $\mathscr{A}_k$-平凡的概念,并且有下列

命题 10.4.1 F 是 $\mathscr{A}_k$-平凡的当且仅当

$$\partial \cdot F \in tF(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)) + wF(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot \psi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p)).$$

证明提示 读者在证明时可利用下列事实:若一个向量场芽在某点处,其阶数不大于 k 的所有导数均为 0,则由它的积分流组成的微分同胚芽在该点具有与恒同映射芽相同的 k-导网.

命题 10.4.2 设 f:$(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$是 r-$\mathscr{A}_k$-决定的($0 \leqslant k < r$), 则

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathscr{M}_p^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathscr{M}_n^{2(r+1)} \cdot V(f),$$

进而有

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{A}_k(f).$$

证明留作练习.

下面的定理引自 A. du Plessis 的一个结果[16],它提供了 $\mathscr{A}_k$-决定性阶数的"基本估计".

定理 10.4.1 设 $1\leqslant k\leqslant r$, f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞ 映射芽,使得

$$\mathscr{M}_n^r\cdot V(f)\subset tf(\mathscr{M}_n^k\cdot V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathscr{M}_p^k\cdot V(\mathbb{R}^p))+\mathscr{M}_n^{2r-k+1}\cdot V(f),$$

则

(i) f 是 $\max\{r-1,\ 2r-2k+1\}$-$\mathscr{A}_{k-1}$-决定的,

(ii) f 是$(2r-k)$-$\mathscr{A}_k$-决定的.

证 (i) 令 $s=\max\{r-1,\ 2r-2k+1\}$. 设 $g\in\varepsilon^0(n,\ p)$合于 $j^sg=j^sf$, 定义$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 F:$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\ [0,\ 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,\ [0,\ 1]\times 0)$如下:

$$F(t,\ x)=(t,\ f_t(x)),$$

$$f_t(x)=(1-t)f(x)+tg(x),$$

显然每一 f_t 具有与 f 相同的 s-导网. 任取 $a\in[0,\ 1]$,令 F^a 为 F 在点$(a,\ 0)$处的芽限制,据引理 10.3.2,$\partial\cdot F^a\in\mathscr{M}_n^{s+1}\cdot\psi(F^a)\subset\mathscr{M}_n^r\psi(F^a)$. 若能证明

$$\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),$$

$$\forall a\in[0,\ 1]. \qquad (*)$$

由命题 10.4.1 知,F^a 是 $\mathscr{A}_{k-1}$-平凡的,因而对于点 a 的邻域内的 t 值,所有 f_t 均 $\mathscr{A}_{k-1}$-等价. 而 $a\in[0,\ 1]$是任取的,并且$[0,1]$是紧致的,所以 $f=f_0$ 与 $g=f_1$ 必 $\mathscr{A}_{k-1}$-等价. 为此先证

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_n^r\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a\subset\, & t(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathscr{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))\\ & +w(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathscr{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))\\ & +(t^a\cdot\mathscr{M}_n^r+\mathscr{M}_n^{2r-k+1})\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a,\end{aligned} \qquad (1)$$

其中 $t^a \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$ 定义为 $t^a(t, x)=t-a$.

为证(1)式,首先注意到

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)} = \varepsilon_n + t^a \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)},$$

它可由 Taylor 定理推出:若 $\phi \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$,则 $\phi(t, x)=\phi(a, x)+(t-a)\cdot R(t, x)$. 简记 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0)}$ 为 ε_{1+n},有

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{1+n} = \mathcal{M}_n^r + t^a \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \varepsilon_{1+n}.$$

因 $\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a$ 是自由 ε_{1+n}-模,将 $V(f)=\varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_i}\circ f\right\}$ 等同于 $\varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_i}\circ(1_{\mathbb{R}}\times f)^a\right\}$,则

$$\mathcal{M}_n^r \cdot \psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a \subset \mathcal{M}_n^r \cdot V(f) + t^a \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a,$$

$$tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n)) \subset t(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathcal{M}_n^k \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)),$$

$$wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p)) \subset w(1_{\mathbb{R}}\times f)^a(\mathcal{M}_p^k \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),$$

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1} \cdot V(f) \subset \mathcal{M}_n^{2r-k+1}\psi(1_{\mathbb{R}}\times f)^a,$$

然后由定理假设条件可导出(1)式.

因为对所构作的 F,每一 f_t 具有与 f 相同的 $(2r-2k+1)$-导网. 现应用逼近引理 10.2.4,令 $l=2r-2k+2$, $R=\mathcal{M}_n^k$,将(1)式中的 $1_{\mathbb{R}}\times f$ 代之以 F,下列包含关系成立:

$$\mathcal{M}_n^r\psi(F^a) \subset tF^a(\mathcal{M}_n^k \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + wF^a(\mathcal{M}_p^k \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))$$
$$+ (t^a \cdot \mathcal{M}_n^r + \mathcal{M}_n^{2r-k+1})\psi(F^a), \qquad (2)$$

余下说明 $(t^a \cdot \mathcal{M}_n^r + \mathcal{M}_n^{2r-k+1})\psi(F^a)$ 是多余的.

用 $\mathcal{M}_n^{r-k+1}$ 乘(2)式两边,并注意

$$\mathcal{M}_n^{r-k+1} \cdot wF^a(\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) \subset (F^a)^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot \psi(F^a),$$

得到

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$
$$+(t^a+\mathcal{M}_n^{r-k+1})\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a). \tag{3}$$

令

$$E=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)+\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)},$$

这是一个有限生成的 ε_{1+n}-模,因为它同构于有限生成的 ε_{1+n}-模 $\mathcal{M}_n^{2r-k+1}.\psi(F^a)$的商. 由(3)式可推出 $E=(t^a+\mathcal{M}_n^{r-k+1})E$,更有 $E=\mathcal{M}_{1+n}\cdot E$,据 Nakayama 引理,$E=0$,因而

$$\mathcal{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$$
$$+(F^a)^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a), \tag{4}$$

将它代入(2)式中,得

$$\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))$$
$$+(t^a+(F^a)^*\mathcal{M}_p)\cdot\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a). \tag{5}$$

令

$$E'=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^r\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathcal{M}_p^k\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))},$$

它是一个$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模,由(5)式可导出 $E'=(t^a+(F^a)^*\mathcal{M}_p)\cdot E'$. 又因 t^a, $(F^a)^*\mathcal{M}_p\subset(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}$, 故

$$E'=(F^a)^*\mathcal{M}_{1+p}\cdot E'. \tag{6}$$

为应用 Nakayama 引理,需证 E'是有限生成的. 为此考虑有限生成的 ε_{1+n}-模

$$E''=\frac{tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+\mathcal{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{tF^a(\mathcal{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))},$$

它也是$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模. 依 Malgrange 预备定理,它是有限生成的当且仅当 $\dim_{\mathbb{R}} E''\Big/(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot E''<\infty$. 而

$$\frac{E''}{(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot E''}$$

$$\cong\frac{\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{\{tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\}\cap\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)},\tag{7}$$

又由(5)式可导出

$$\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot\psi(F^a),$$

以及

$$\mathscr{M}_n^{2r}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathscr{M}_n^{r+k}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a),$$

于是(7)式右边的分母包含 $\mathscr{M}_n^{2r}\cdot\psi(F^a)$,并且它还包含 $t^a\cdot\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$(因 $t^a\in(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}$),因而包含 $\mathscr{M}_{1+n}^r\cdot\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$(因 $\mathscr{M}_{1+n}^r\subset\mathscr{M}_n^r+t^a\cdot\varepsilon_{1+n}$). 又 $\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$是有限生成的 ε_{1+n}-模,因此

$$\dim_{\mathbb{R}}\frac{E''}{(F^a)^*\mathscr{M}_{1+p}\cdot E''}\leqslant\dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}{\mathscr{M}_{1+n}^r\cdot\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)}<\infty,$$

据 Malgrange 预备定理,E''是有限生成的$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模.

注意下列包含关系

$$tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$

$$\subset tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))+\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(F^a)$$

诱导出$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模之间满同态 $E''\to E'$,因此 E'也是有限生成的$(F^a)^*\varepsilon_{1+p}$-模. 由(6)式,依 Nakayama 引理得出 $E'=0$, 因此(*)式成立. 据前面分析,(i)得证.

(ii) 将(*)式代入(4)式中,得

$$\mathscr{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)\subset tF^a(\mathscr{M}_n^{r+1}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+(F^a)^*\mathscr{M}_p$$
$$\cdot\{tF^a(\mathscr{M}_n^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^k\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p))\}$$
$$\subset tF^a(\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+wF^a(\mathscr{M}_p^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)).$$

因(i)中构作的 F 满足下列条件:每一 f_t 与 f 具有相同的 $(2r-k)$-导网,据引理 10.3.2,$\partial\cdot F^a\in\mathscr{M}_n^{2r-k+1}\cdot\psi(F^a)$,因此

$$\partial\cdot F^a\in tF^a(\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$$
$$+wF^a(\mathscr{M}_p^{k+1}\cdot\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)),\ \forall a\in[0,1].$$

这说明对每一 $a\in[0,1]$,F^a 是 $\mathscr{A}_k$-平凡的. 再按照(i)中的分析,(ii)亦真.

§10.5 决定性阶数估计

如何对有限决定的映射芽的阶数进行估计呢? 定理 10.3.1 本身提供了一种估计方式,但是按照 Mather 的方法对非稳定的有限决定的映射芽进行阶数估计有时很不理想, 例如 T. Gaffney 曾给出下面例子:

$$f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),\ (x,y)\mapsto(x,y^3+x^2y),$$

按照 Mather 的方法估计,f 是 10^{24}-$\mathscr{A}$-决定的. 因此寻找一些有效的方法与技巧用来估计决定性阶数是有意义的. 对于上例来说,按照 Gaffney 的方法,f 是 6-$\mathscr{A}$-决定的,而按照 du Plessis 的方法.则为 3-$\mathscr{A}$-决定的(见例 2). 本节就 $\mathscr{A}$ 及 $\mathscr{A}_k$ 情形予以讨论. 值得指出的是,Mather 提供的下列引理及其推论将使讨论变得简洁(见文献[49]).

引理 10.5.1 设 G 为 Lie 群,M 为 C^∞ 流形,$\alpha:G\times M\to M$ 是一个 C^∞ 群作用. 又假设 V 是 M 的 C^∞ 连通子流形,那么 V 包

含在α 的一条轨道中的必要充分条件是

(a) 对于所有 $v\in V$, $T_v(G\cdot v)\supset T_vV$,

(b) $\dim T_v(G\cdot v)$不依赖于 $v\in V$ 的选取.

注 对于充分性而言,仅条件(a)还不够. 例如,设 $M=\mathbb{R}^2$, G 为 $GL(2,\mathbb{R})$的子群,由上三角矩阵组成,α 为 G 在 M 上的通常作用,则存在 3 条轨道:原点, x 轴除去原点,平面$\mathbb{R}^2$ 除去 x 轴. 由 $y=(x-1)^2$ 定义的抛物线 V 满足条件(a)但不位于上述单独一条轨道中.

下面的推论说明应用引理 10.5.1 可不必验证条件(b). 首先介绍有关术语.

一个 C^∞ 流形 M 连同 Lie 群 G 在 M 上的作用称为一个 G-空间. 假设 M, M'为 G-空间. 若 $\pi: M\to M'$是一个 C^∞ 淹没且使得

$$\pi(gx) = g\pi(x), \quad g\in G, \quad x\in M,$$

则 π 叫做 G-淹没.

推论 10.5.1 设 M, M'为 G-空间, $\pi: M\to M'$为 G-淹没, $V=\pi^{-1}(x')$, $x'\in M'$. 假定 V 是连通的,那么 V 包含在 G 的一条轨道中的必要充分条件是引理 10.5.1 中的条件(a)被满足.

上述引理及推论的证明见附录 A.

命题 10.5.1 设 $f\in\varepsilon^0(n, p)$,则 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的当且仅当对于 $\varepsilon^0(n, p)$中与 f 具有相同 r-导网的每一 g,有

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(g)\subset T\mathscr{G}(g)+\mathscr{M}_n^{\varepsilon r+2}\cdot V(g), \tag{1}$$

其中当 $\mathscr{G}=\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$ 时, $\varepsilon=1$,当 $\mathscr{G}=\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{L}$ 时, $\varepsilon=2$.

证 $\Rightarrow$设 $g\in\varepsilon^0(n, p)$合于 $j^rg=j^rf$. 因 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的,故 g 也是. 据定理 10.3.1(i), (1)式成立.

$\Leftarrow$ 应用推论 10.5.1 来证. 记 $l=\varepsilon r+1$, 取 $M=J^l$, $G=\mathscr{G}^l$, $V=\{j^lg\in J^l \mid j^rg=j^rf\}$,则 G 是 Lie 群, M 为 C^∞ 流形并且具有向量空间结构. V 对于这一空间结构而言是 M 的子空间,因而是连通子流形.

假定条件(1)可改写为

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(g) \subset T\mathscr{G}(g) \quad \text{modulo } \mathscr{M}_n^{l+1} \cdot V(g),$$

因此

$$\pi^l(\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(g)) \subset \pi^l(T\mathscr{G}(g)). \tag{2}$$

而

$$\pi^l(\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(g)) = T_{j^l g} V, \quad \pi^l(T\mathscr{G}(g)) = T_{j^l g}(\mathscr{G}^l \cdot j^l g),$$

故(2)式写为

$$T_{j^l g} V \subset T_{j^l g}(\mathscr{G}^l \cdot j^l g), \text{ 对每一 } j^l g \in V.$$

令 $\pi^{l,r}: J^l \to J^r$ 为自然投影,它将次数不大于 l 的多项式映射截断至 r 次. 显然 $\pi^{l,r}$ 是一个 $\mathscr{G}^l$ -淹没,其中 $\mathscr{G}^l$ 在 J^r 上的作用借助于投影 $\mathscr{G}^l \to \mathscr{G}^r$. 此外, $V = (\pi^{l,r})^{-1} j^r f$, 根据推论 10.5.1, V 包含在单独一条 $\mathscr{G}^l$-轨道中,这意思是说对于和 f 具有相同 r-导网的任意 g,存在 $\phi \in \mathscr{G}$,使得 $j^l(\phi \cdot g) = j^l f$. 由假设条件(1)(取 $g = f$),依定理 10.3.1,(i)中证明可得到 $\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(f) \subset T\mathscr{G}(f)$,再根据定理 10.3.1(ii), f 是 l-$\mathscr{G}$-决定的,因而 $\phi \cdot g \underset{\mathscr{G}}{\sim} f$,且 $g \underset{\mathscr{G}}{\sim} f$. 以上事实说明对于具有和 f 相同 r-导网的任意 g,有 $g \underset{\mathscr{G}}{\sim} f$. 因此 f 是 r-$\mathscr{G}$-决定的.

利用上述证法以及定理 10.4.1,可证明

命题 10.5.2 设 $0 \leqslant k < r$, $f \in \varepsilon^0(n, p)$,则 f 是 r-$\mathscr{A}_k$-决定的当且仅当存在整数 $l(2r - k + 1 \leqslant l \leqslant 2r + 1)$,使得

$$\mathscr{M}_n^{r+1} \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + \mathscr{M}_n^{l+1} \cdot V(g)$$

对于 $\varepsilon^0(n, p)$ 中具有与 f 相同 r-导网的任意 g 均成立.

因为当 $\mathscr{G} = \mathscr{R}, \mathscr{C}$ 或 $\mathscr{K}$ 时,切空间 $T\mathscr{G}_k(f)$ 均为 ε_n-模,因此较之上一命题,容易证明下面的

命题 10.5.3 对于 $\mathscr{G} = \mathscr{R}, \mathscr{L}$ 或 $\mathscr{K}$, $k \geqslant 1$, f 是 r-$\mathscr{G}_k$-决定的当

且仅当

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset T\mathcal{G}_k(f).$$

注 该命题可视为定理 10.3.1 的一种改进形式，曾由 W. Kucharz(对于 $p=1$ 情形)和 J. J. Gervais(对于一般情形)研究过(见文献[22]和[37]).

以上二命题留给读者证明. 下面将提供几个判别法，以便对 $\mathcal{A}_k$-决定的映射芽的阶数进行有效估计(见文献[39]).

定理 10.5.1 设 $0\leqslant k<r, f\in\varepsilon^0(n, p)$. 假设存在 ε_n-模 D，使得

(a) $D\subset tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^r\cdot V(f)$,

(b) $\mathcal{M}_n^r\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)$，则 f 是 r-$\mathcal{A}_k$-决定的.

证 设 $g\in\varepsilon^0(n, p)$满足 $j^rg=j^rf$，据逼近引理 10.2.1 及其注，有

$$D\subset tg(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n))+wg(\mathcal{M}_p^k V(\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^r\cdot V(g)\quad(3)$$

和

$$\mathcal{M}_n^r\cdot V(g)\subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g).\quad(4)$$

考虑 ε_n-模

$$E=\frac{tg(\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^r\cdot V(g)}{tg(\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{2r+2}\cdot V(g)},$$

由(4)式,

$$tg(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^r\cdot V(g)\subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(g),$$

据此可推出 $E=\mathcal{M}_n\cdot E$. 此外，$\mathcal{M}_n^{r+2}\cdot E=0$，于是 $E=0$，并且

$$\mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset tg(\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathcal{M}_p \cdot D + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(3)式右边代替，得

$$\mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + g^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g). \tag{5}$$

令

$$E' = \frac{T\mathscr{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^r \cdot V(g)}{T\mathscr{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} V(g)},$$

这是一个 $g^* \varepsilon_p$-模. 据(5)式，$E' = Z \cdot E'$，其中 $Z = g^* \varepsilon_p \cap \mathcal{M}_n$. 此外，$Z^{r+2} \cdot E' = 0$，于是 $E' = 0$，且有

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \cdot V(g) \subset \mathcal{M}_n^r \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + \mathcal{M}_n^{2r+2} \cdot V(g).$$

因为上式对具有和 f 相同 r-导网的任意 g 均成立，据命题 10.5.2，f 是 r-$\mathscr{A}_k$-决定的.

推论 10.5.2 设 l, l_1 和 k 为非负整数满足 $l + l_1 > k \geqslant 0$. 若 $f \in \varepsilon^0(n, p)$ 使得

$$\mathcal{M}_n^l \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{l+1} \cdot V(f) \tag{6}$$

和

$$\mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^k V(\mathbb{R}^n) + wf(\mathcal{M}_p^k \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathcal{M}_n^{l+r} \cdot V(f), \tag{7}$$

其中 $r = \max\{l_1, k\}$，则 f 是$(l + r) - \mathscr{A}_k$-决定的.

证 (i) 若 $l_1 \geqslant k$，则 $r = l_1$. (6)式两边同乘以 $\mathcal{M}_n^{l_1}$，得

$$\mathcal{M}_n^{l+l_1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{l_1+1} V(\mathbb{R}^n))$$
$$+ f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^{l_1} \cdot V(f) + \mathcal{M}_n^{l+l_1+1} \cdot V(f),$$

又 $l_1\geqslant k$,更有

$$\mathcal{M}_n^{l+l_1}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^{l_1}\cdot V(f)$$
$$+\mathcal{M}_n^{l+l_1+1}\cdot V(f). \tag{8}$$

取 $D=\mathcal{M}_n^{l_1}\cdot V(f)$. 由(7)与(8)式,据定理 10.5.1,$f$ 是$(l+l_1)$-$\mathscr{A}_k$-决定的.

(ii) 若 $l_1<k$,则 $r=k$. 由(7)式有

$$\mathcal{M}_n^k\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^kV(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p^kV(\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^{l+k}\cdot V(f). \tag{9}$$

将(6)式两边同乘以 $\mathcal{M}_n^k$,得

$$\mathcal{M}_n^{l+k}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot\mathcal{M}_n^k\cdot V(f)$$
$$+\mathcal{M}_n^{l+k+1}\cdot V(f). \tag{10}$$

取 $D=\mathcal{M}_n^k\cdot V(f)$. 由(9)和(10)式,据定理 10.5.1,$f$ 是$(l+k)$-$\mathscr{A}_k$-决定的.

综上,f 是$(l+r)$-$\mathscr{A}_k$-决定的. 证毕.

回忆一个映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$是无穷小 $\mathscr{A}$-稳定的是指 $T_e\mathscr{A}(f)=V(f)$. Mather 证明了无穷小 $\mathscr{A}$-稳定的映射芽必为有限决定的,并且对决定性阶数给出了较好的一致估计. 下面介绍一个简洁的证明.

定理 10.5.2 若 $f\in\varepsilon^0(n,p)$为无穷小 $\mathscr{A}$-稳定芽,则 f 是$(p+1)$-$\mathscr{A}$-决定的.

证 因 $tf(V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot V(f)\supset tf(V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p))$,后者在 $T_e\mathscr{A}(f)=V(f)$中的余维数最多为 p,因此更有

$$\dim_{\mathbb{R}}\frac{V(f)}{tf(V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^{p+1}\cdot V(f)}\leqslant p.$$

令 $B_i=tf(V(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p\cdot V(\mathbb{R}^p))+\mathcal{M}_n^i\cdot V(f)$ $(0\leqslant i\leqslant p+1)$.

诸子模 B_i 不可能全不同. 若对某一 $i_0 \leqslant p$, 有 $B_{i_0} = B_{i_0+1}$, 则

$$\mathscr{M}_n^{i_0} \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathscr{M}_p \cdot V(\mathbb{R}^p)) + \mathscr{M}_n^{i_0+1} \cdot V(f),$$

从而

$$\mathscr{M}_n^{i_0} \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot V(f) + \mathscr{M}_n^{i_0+1} \cdot V(f).$$

由 Nakayama 引理,

$$\mathscr{M}_n^{p} \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot V(f). \tag{11}$$

此外,

$$\mathscr{M}_n \cdot V(f) \subset T_e \mathscr{A}(f) = tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)). \tag{12}$$

现应用定理 10.5.1. 取 $k=0, D=\mathscr{M}_n \cdot V(f)$. 将(11)式两边同乘以 $\mathscr{M}_n$, 得

$$\mathscr{M}_n^{p+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot D.$$

由上式及(12)式知, f 是 $(p+1)$-$\mathscr{A}$-决定的.

例 1 设 $f_i: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 定义如下:

当 $n \geqslant p$ 时, $f_1(x) = (x_1, \cdots, x_{p-1}, \sum_{i=p}^{n} \pm x_i^2)$,

当 $2n-1 \geqslant p \geqslant n$ 时, $f_2(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 x_n, \cdots, x_{p-n} x_n, x_n^2)$,

当 $p \geqslant 2n$ 时, $f_3(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_1 x_n, \cdots, x_{n-1} x_n, x_n^2, 0, \cdots, 0)$.

经计算, 有

$$tf_1(V(\mathbb{R}^n)) + wf_1(V(\mathbb{R}^p)) = V(f_1),$$

$$tf_1(V(\mathbb{R}^n)) + f_1^* \mathscr{M}_p \cdot V(f_1) \supset \mathscr{M}_n \cdot V(f_1),$$

因此 f_1 是 $\mathscr{A}$-稳定的, 并且是 2-$\mathscr{A}$-决定的. 通常 f_1 叫做折叠. 其次

$$tf_2(V(\mathbb{R}^n)) + wf_2(V(\mathbb{R}^p)) = V(f_2),$$

$$tf_2(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f_2^* \mathcal{M}_p \cdot V(f_2) \supset \mathcal{M}_n^2 \cdot V(f_2),$$

所以 f_2 也是 $\mathcal{A}$-稳定的,并且是 2-$\mathcal{A}$-决定的. 但是 $T\mathcal{A}(f_3)$具有无限余维,因而不是有限决定的.

在讨论下面例子之前,先引入一些记号以便描述 $V(f)$的子空间. 设$\{x_1, \cdots, x_n\}$及$\{y_1, \cdots, y_p\}$分别为 f 的源空间和靶空间的坐标系,则$\left\{wf\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right\}$是自由 ε_n-模 $V(f)$的自由基,并且借助于这组基,将 $V(f)$等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$. 又 ε_n 可写为

$$\varepsilon_n = \mathbb{R}\{\text{所有单项式 } x_{i_1}\cdots x_{i_j}: 1 \leqslant i_1, \cdots, i_j \leqslant n, j < \infty\} + \mathcal{M}_n^\infty,$$

其中 $\mathcal{M}_n^\infty = \bigcap_{l\geqslant 1}\mathcal{M}_n^l$. 若 $a_1, \cdots, a_q$ 是$x_1, \cdots, x_n$ 的单项式,规定 $\varepsilon_n \div \{a_1, \cdots, a_q\} = \mathbb{R}\{\text{除 } a_1, \cdots, a_q \text{ 之外的所有单项式}\} + \mathcal{M}_n^\infty$.

例 2 设 $n=p=2$, $f:(\mathbb{R}^2, 0)\to(\mathbb{R}^2, 0)$定义为

$$f(x, y) = (x, y^3 \pm x^t y), \quad t \geqslant 1,$$

容易算出

$$\mathcal{M}_n^2 \cdot V(f) \subset \begin{cases} tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f), & t = 1, \\ tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n \cdot V(f), & t \geqslant 2 \end{cases} \tag{1}$$

和

$$tf(V\mathbb{R}^n) + wf(V(\mathbb{R}^p)) = \begin{cases} V(f), & t = 1, \\ (\varepsilon_n, \varepsilon_n \div \{y, \cdots, x^{t-2}y\}), & t \geqslant 2. \end{cases} \tag{2}$$

(i) $t=1$. 用 $\mathcal{M}_n$ 的元素乘(1)式,得

$$\mathcal{M}_n^3 \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n \cdot V(f).$$

由(2)式知，f 是 $\mathcal{A}$-稳定的，故

$$\mathcal{M}_n \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)),$$

应用定理 10.5.1，取 $k=0, D=\mathcal{M}_n \cdot V(f)$，易见 f 是 3-$\mathcal{A}$-决定的.

(ii) $t \geqslant 2$. 用 $\mathcal{M}_n^{t-1}$ 的元素乘(1)式，得

$$\mathcal{M}_n^{t+1} \cdot V(f) \subset tf(\mathcal{M}_n^{t-1} \cdot V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot \mathcal{M}_n^t \cdot V(f),$$

又由(2)式，$\mathcal{M}_n^t \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p))$. 据定理 10.5.1，$f$ 是 $(t+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

注意，这些决定性阶数均为精确的，因映射芽 $(x, y) \mapsto (x, y^3)$ 不是有限 $\mathcal{A}$-决定的.

例 3 设 f: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^3, 0)$ 定义为

$$f(x, y) = (x, y^2, x^r y + y^{2i+1}),\ i \geqslant 1,\ r \geqslant 2.$$

经计算得

$$\begin{aligned} & tf(V(\mathbb{R}^2)) + wf(V(\mathbb{R}^3)) \\ &= (\varepsilon_2, \varepsilon_2, \varepsilon_2 \dotplus \{x^k y^{2s+1} : 0 \leqslant k \leqslant r-2,\ 0 \leqslant s \leqslant i-1\}), \end{aligned}$$

因此 ε_2-模

$$D = (\varepsilon_2, \varepsilon_2, \{x^{r-1}, y^{2i}\} \cdot \varepsilon_2) \subset tf(V(\mathbb{R}^2)) + wf(V(\mathbb{R}^3)),$$

又

$$\begin{aligned} f^* \mathcal{M}_3 \cdot D = (&\{x, y^2\} \cdot \varepsilon_2, \{x, y^2\} \cdot \varepsilon_2, \\ &\{x^r, xy^{2i}, x^{r-1}y^2, y^{2i+2}\} \cdot \varepsilon_2). \end{aligned}$$

(a) $i=1,\ r \geqslant 3$: $\mathcal{M}_2^{r+1} \cdot V(f) \subset f^* \mathcal{M}_3 \cdot D$，据定理 10.5.1，$f$ 是 $(r+1)$-$\mathcal{A}$-决定的.

(b) $i>1,\ r=2, 3$: $\mathcal{M}_2^{2i+1} \cdot V(f) \subset f^* \mathcal{M}_3 \cdot D + \mathbb{R}(0,0,y^{2i+1})$.

又因

$$tf\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)=(0,\ 2y^2,\ x^ry+(2i+1)y^{2i+1}),$$

$$(0,\ y^2,\ 0),\ (0,\ 0,\ x^ry)\in f^*\mathcal{M}_3\cdot D,$$

故

$$\mathcal{M}_2^{2i+1}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+f^*\mathcal{M}_3\cdot D.$$

据定理 10.5.1, f 是$(2i+1)$-$\mathscr{A}$-决定的.

以上决定性阶数都是精确的,因为$(x,\ y)\mapsto(x,\ y^2,\ y^3)$, $(x,\ y)\mapsto(x,\ y^2,\ x^ry)$都非有限 $\mathscr{A}$- 决定的.

对于其他情形(参看例 4),定理 10.5.1 也能给出阶数估计,但不是精确的. 为此需要另外的判别方法,下面再介绍两个.

定理 10.5.3 设 $0\leqslant k<s$. 若 ε_n-模 D 满足

$$D\subset\{tf(\mathcal{M}_n^kV(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p^kV(\mathbb{R}^p))\}\cap\mathcal{M}_n\cdot V(f)+\mathcal{M}_n^s\cdot V(f),$$

又假定

$$\mathcal{M}_n^s\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}_k(f)+\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(f),$$

$$\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{k+2}\cdot V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{s+2}\cdot V(f),$$

那么 f 是 s-$\mathscr{A}_k$-决定的.

证 设 g 与 f 具有相同的 s-导网. 依逼近引理 10.2.1 及其注,

$$D\subset\{tg(\mathcal{M}_n^kV(\mathbb{R}^n))+wg(\mathcal{M}_p^kV(\mathbb{R}^p))\}\cap\mathcal{M}_n\cdot V(g)+\mathcal{M}_n^s\cdot V(g),\tag{1}$$

$$\mathcal{M}_n^s\cdot V(g)\subset T\mathscr{A}_k(g)+\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(g),\tag{2}$$

$$\mathcal{M}_n^{s+1}\cdot V(g)\subset tg(\mathcal{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n))+g^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{s+2}\cdot V(g).\tag{3}$$

对 ε_n-模

$$\frac{tg(\mathscr{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{s+1} \cdot V(g)}{tg(\mathscr{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g)},$$

应用 Nakayama 引理的平凡变形(参看定理 10.5.1 的证明),并利用(3)式可导出

$$\mathscr{M}_n^{s+1} \cdot V(g) \subset tg(\mathscr{M}_n^{k+2}V(\mathbb{R}^n)) + g^*\mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g),$$

将它代入(2)式中的 $\mathscr{M}_n^{s+1} \cdot V(g)$,得

$$\mathscr{M}_n^s \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + g^*\mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(1)式右边代替,得

$$\mathscr{M}_n^s \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + g^*\mathscr{M}_p \cdot \mathscr{M}_n^s \cdot V(g) + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g). \tag{4}$$

再一次应用 Nakayama 引理的平凡变形于 $g^*\varepsilon_p$-模

$$\frac{T\mathscr{A}_k(g) + \mathscr{M}_n^s \cdot V(g)}{T\mathscr{A}_k(g) + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g)},$$

并利用(4)式可导出

$$\mathscr{M}_n^{s+1} \cdot V(g) \subset T\mathscr{A}_k(g) + \mathscr{M}_n^{2s+2} \cdot V(g).$$

因为上式对所有与 f 具有相同 s-导网的 g 皆成立,据命题 10.5.2,f 是 s-$\mathscr{A}_k$-决定的.

定理 10.5.4 设 $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant s-1$. 若 ε_n-模 D 满足

$$D \subset \{tf(\mathscr{M}_n^{k+1}V(\mathbb{R}^n)) + wf(\mathscr{M}_p^k V(\mathbb{R}^p))\} \cap \mathscr{M}_n^{l+1} \cdot V(f) + \mathscr{M}_n^s \cdot V(f), \tag{1}$$

又

$$\mathscr{M}_n^s \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_n^{l+1}V(\mathbb{R}^n)) + f^*\mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{s+l} \cdot V(f), \tag{2}$$

$$\mathcal{M}_n^{s+l}\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{l+2}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot D+\mathcal{M}_n^{s+l+1}\cdot V(f),$$

(3)

则 f 是$(s-1)$-$\mathcal{A}_k$-决定的.

证明方法与上一定理类似,留作练习.

注 若条件(2)用

$$\mathcal{M}_n^s\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_n^{l+1}V(\mathbb{R}^n))+f^*\mathcal{M}_p\cdot\{(tf(\mathcal{M}_n^kV(\mathbb{R}^n))+wf(\mathcal{M}_p^kV(\mathbb{R}^p)))\cap\mathcal{M}_n^l\cdot V(f)+\mathcal{M}_n^sV(f)\}+\mathcal{M}_n^{s+l}\cdot V(f) \quad (2')$$

来代替,结论依然成立.

例 4 继续例 3 的讨论

(c) 当 $i=1, r=2$ 时,令 $D'=D\cap\mathcal{M}_2V(f)=(\mathcal{M}_2,\ \mathcal{M}_2,\ \{x,\ y^2\}\cdot\varepsilon_2)$, 则 $f^*\mathcal{M}_3\cdot D'=(\{x,\ y^2\}\mathcal{M}_2,\ \{x,\ y^2\}\mathcal{M}_2,\ \{x,\ y^2\}^2\cdot\varepsilon_2)\supset\mathcal{M}_2^4\cdot V(f)$. 容易验证

$$\mathcal{M}_2^3\cdot V(f)\subset tf(\mathcal{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathcal{M}_3V(\mathbb{R}^3)),$$

据定理 10.5.3, f 是 3-$\mathcal{A}$-决定的,这里 $f(x,\ y)=(x,\ y^2,\ x^2y+y^3)$. 又决定性阶数是精确的,因$(x,\ y)\mapsto(x,\ y^2,\ 0)$ 非有限决定.

(d) 当 $i>2, r\geqslant 4$ 时,令

$$D''=(\mathcal{M}_2,\ \{x,\ y^2\}\cdot\varepsilon_2,\ \{x^r,\ x^{r-1}y^2,\ xy^{2i},\ y^{2i+1}\}\cdot\varepsilon_2),$$

则

$$D''\subset tf(\mathcal{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathcal{M}_3\cdot V(\mathbb{R}^3)),$$

$$f^*\mathcal{M}_3\cdot D''=\Big(\{x,\ y^2\}\cdot\mathcal{M}_2,\ \{x,\ y^2\}^2\cdot\varepsilon_2,\ \{x^{r+1},\ x^ry^2,\ x^{r-1}y^4,\ x^2y^{2i},\ xy^{2i+1},\ y^{2i+3}\}\cdot\varepsilon_2\Big).$$

1) 对于 $r>4$,易见

$$\mathscr{M}_2^{2i+r-2}\cdot V(f)\subset f^*\mathscr{M}_3\cdot D'',$$

据定理 10.5.4,f 是$(2i+r-3)-\mathscr{A}$决定的.

2) 对于 $r=4$,令

$$D'''=D''\cap\mathscr{M}_2^2\cdot V(f),\tag{$\underline{1}$}$$

易见

$$\mathscr{M}_2^{2i+2}\cdot V(f)\subset f^*\mathscr{M}_3\cdot D'''+\mathbb{R}(0,\,0,\,y^{2i+2}),$$

而 $y^{2i+2}\in(f^*\mathscr{M}_3)^{i+1}$,因此

$$\mathscr{M}_2^{2i+2}\cdot V(f)\subset f^*\mathscr{M}_3\cdot(D'''+wf(\mathscr{M}_3^i\cdot V(\mathbb{R}^3))),\tag{$\underline{2}$}$$

又

$$\mathscr{M}_2^{2i+3}\cdot V(f)\subset f^*\mathscr{M}_3\cdot D''',\tag{$\underline{3}$}$$

现应用定理 10.5.4,取 $k=0$, $l=1$,将($\underline{1}$)和($\underline{2}$)及($\underline{3}$)式对照条件(1)和(2′)与(3)式,则断言 f 是$(2i+1)$-$\mathscr{A}$决定的.

这些结果是精确的,因为下列包含关系

$$\mathscr{M}_2^q\cdot V(f)\subset tf(\mathscr{M}_2\cdot V(\mathbb{R}^2))+wf(\mathscr{M}_3\cdot V(\mathbb{R}^3))$$

成立的最小整数 $q=2i+r-2$.

若 $i=2, r\geqslant 4$,读者可参看文献[16].

例 5 设 $f:(\mathbb{R}^3,\,0)\to(\mathbb{R}^2,\,0)$定义为

$$f(x,\,y,\,z)=(x^2+y^2+x^3+z^3,\,x^2+z^2+y^3).$$

经计算,有

$$\mathscr{M}_3^4\cdot V(f)\subset tf(V(\mathbb{R}^3))+f^*\mathscr{M}_2\cdot V(f)+\mathscr{M}_3^5\cdot V(f),\tag{1}$$

及

$$\mathscr{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(V(\mathbb{R}^3)) + wf(V(\mathbb{R}^2)) + \mathscr{M}_3^8 \cdot V(f). \quad (2)$$

将(1)式乘以 $\mathscr{M}_3$,得

$$\mathscr{M}_3^5 \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_3 \cdot V(\mathbb{R}^3)) + f^* \mathscr{M}_2 \cdot \mathscr{M}_3 \cdot V(f) + \mathscr{M}_3^6 \cdot V(f), \quad (3)$$

据推论 10.5.2,由(2)和(3)式可知 f 是 9-$\mathscr{A}$-决定的.

而通过计算进一步发现(2)式可改进为

$$\mathscr{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_3^3 V(\mathbb{R}^3)) + wf(\mathscr{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) + \mathscr{M}_3^8 \cdot V(f), \quad (4)$$

按照定理 10.4.1(取 $k=2$, $r=4$),f 是 5-$\mathscr{A}_1$-决定的或 6-$\mathscr{A}_2$-决定的.

又由(4)式,有

$$\mathscr{M}_3^4 \cdot V(f) \subset tf(\mathscr{M}_3^3 V(\mathbb{R}^3)) + wf(\mathscr{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) + \mathscr{M}_3^6 \cdot V(f), \quad (5)$$

用 $\mathscr{M}_3^2$ 乘上式两边,可得到

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_3^6 \cdot V(f) &\subset tf(\mathscr{M}_3^5 V(\mathbb{R}^3)) + (f^* \mathscr{M}_2)^2 \cdot \mathscr{M}_3^2 \cdot V(f) + \mathscr{M}_3^8 \cdot V(f) \\ &\subset tf(\mathscr{M}_3^5 V(\mathbb{R}^3)) + f^* \mathscr{M}_2 \cdot \mathscr{M}_3^4 \cdot V(f) + \mathscr{M}_3^8 \cdot V(f),\end{aligned} \quad (6)$$

因为 $wf(\mathscr{M}_2^2 V(\mathbb{R}^2)) \subset (f^* \mathscr{M}_2)^2 \cdot V(f)$, $f^* \mathscr{M}_2 \subset \mathscr{M}_3^2$.

现应用定理 10.5.4,取 $D = \mathscr{M}_3^4 \cdot V(f)$, $s=4$, $l=2$ 和 $k=1$. 从(5)和(6)式可见定理 10.5.4 中的条件(2′)和(3)被满足,因此 f 是 3-$\mathscr{A}_1$-决定的.

§10.6 M-决定性的基本估计

10.6.1 M-$\mathscr{A}$-决定性是有限$\mathscr{A}$-决定性的推广

回忆光滑映射芽有限决定的定义,$f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$是 r-

$\mathscr{A}$-决定的,是指对于具有与 f 相同 r-导网的任意 $g:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$, g 和 f 必 $\mathscr{A}$-等价,这里 $j^rg=j^rf$ 意味着

$$(y_1\circ g-y_1\circ f, \cdots, y_p\circ g-y_p\circ f)\in(\mathscr{M}_n^{r+1})^{\times p},$$

其中 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 为 $(\mathbb{R}^p, 0)$ 的局部坐标系. 现在将决定性概念推广,引入所谓 M-$\mathscr{A}$-决定性. 这一概念首先由 A. du Plessis 提出[16]. 本节材料主要取自文献[21].

定义 10.6.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽, $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 为 $(\mathbb{R}^p,0)$ 的局部坐标系. 假定 M 是 $\varepsilon_n^{\times p}$ 的 $\mathbb{R}$-子空间.

1) 若 C^∞ 芽 $g: (\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 满足下列条件:

$$(y_1\circ g-y_1\circ f, \cdots, y_p\circ g-y_p\circ f)\in M,$$

则 g 叫做 f 的一个 M-逼近(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言),此时也说 g M-等价于 f.

显然,"M-等价"是一个等价关系.

2) 若 f 的每一个 M-逼近 g 必 $\mathscr{A}$-等价于 f,则说 f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言),并且 M 叫做 f 的决定性范围.

注 一般来说,上述概念依赖于坐标系 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 的选取. 然而当 $M=(I)^{\times p}$(I 为 ε_n 中理想)时,却与坐标系的选取无关,见推论 10.6.2. 在这种情形下, $(I)^{\times p}$-逼近及 $(I)^{\times p}$-$\mathscr{A}$-决定性简记为 I-逼近和 I-$\mathscr{A}$-决定性. 特别,若 $M=(\mathscr{M}_n^{r+1})^{\times p}$, M-$\mathscr{A}$-决定性就是 r-$\mathscr{A}$-决定性.

M-决定性问题可以按照前面几节中所述的方法来处理. 例如

引理 10.6.1 若 f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言),则

$$M\subset T\mathscr{A}(f)+\mathscr{M}_n^{l+1}\cdot V(f), \quad \forall\, l\geqslant 0,$$

这里 $V(f)$ 等同于 $\varepsilon_n^{\times p}$(借助局部坐标系 $\{y_1, \cdots, y_p\}$).

引理 10.6.2 设 g 是 f 的 M-逼近(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言),

则

(i) $f^* y_i - g^* y_i \in M_i\ (i=1, \cdots, p)$，其中 $M_i = \{\phi \in \mathscr{M}_n \mid \exists (\phi_1, \cdots, \phi_p) \in M\ s.\ t.\ \phi_i = \phi\}$.

(ii) $tf(\xi) - tg(\xi) \in \xi \cdot M\ (\xi \in V(\mathbb{R}^n))$，其中 $\xi \cdot M$ 规定如下：设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, 0)$ 的局部坐标系，若 $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，则

$$\xi \cdot M = \{(a_1, \cdots, a_p) \in \varepsilon_n^{\times p} \mid \exists (\phi_1, \cdots, \phi_p) \in M \text{ 使得 } \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = a_j,\ j = 1, \cdots, p\}.$$

上述二引理的证明留作练习.

例1 设 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$定义为

$$f(x, y) = (x, y^4 + xy^2 + x^2 y).$$

假定 $M = (\{x^2, xy^2, y^4\} \cdot \varepsilon_n, \{x^3, x^2y^2, xy^4, y^6\} \cdot \varepsilon_n)$，这里 $n = p = 2$. 断言：f 是 M-$\mathscr{A}$-决定的.

经计算，

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + wf(V(\mathbb{R}^p)) = (\varepsilon_n \div \{y\}, \varepsilon_n \div \{y, xy, y^2, y^3\} + \mathbb{R} \cdot (4y^3 + 2xy + x^2)) + \varepsilon_n \cdot (1, y^2 + 2xy).$$

令

$$D = (\{x, y^2\} \cdot \varepsilon_n, \{x^2, xy^2, y^4\} \cdot \varepsilon_n),$$

不难验证

$$D \subset tf\left((\mathbb{R} \cdot x + \mathscr{M}_n^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathscr{M}_n \frac{\partial}{\partial y}\right) + \{(f_1^{i+1}, 0), (0, f_1^{j+2}), (0, f_2 f_1^k) : 0 \leqslant i, j, k\}, \quad (1)$$

其中 f_1，f_2 为 f 的分量函数. 又

$$M \subset tf(\mathscr{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathscr{M}_p \cdot D. \tag{2}$$

现设 g 为 f 的任意 M-逼近. 利用引理 10.6.2,并通过计算可以证明

$$D \subset tg\left((\mathbb{R}\cdot x + \mathscr{M}_n^2)\frac{\partial}{\partial x} + \mathscr{M}_n \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$+\{(g_1^{i+1}, 0), (0, g_1^{j+2}), (0, g_2 g_1^k) : 0 \leqslant i, j, k\} + M, \tag{3}$$

$$M \subset tg(\mathscr{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n \cdot M, \tag{4}$$

(4)式说明 ε_n-模

$$E = \frac{tg(\mathscr{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathscr{M}_p \cdot D + M}{tg(\mathscr{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{11} \cdot V(g)}$$

满足 $E = \mathscr{M}_n \cdot E$,据 Nakayama 引理,$E = 0$,从而

$$M \subset tg(\mathscr{M}_n^3 V(\mathbb{R}^n)) + g^* \mathscr{M}_p \cdot D + \mathscr{M}_n^{11} \cdot V(g),$$

将上式中的 D 用(3)式右边代替,得

$$M \subset tg(\mathscr{M}_n^2 V(\mathbb{R}^n)) + wg(\mathscr{M}_p^2 V(\mathbb{R}^p)) + g^* \mathscr{M}_p \cdot M + \mathscr{M}_n^{11} \cdot V(g).$$

作 $g^* \varepsilon_p$-模

$$E' = \frac{T\mathscr{A}_1(g) + M}{T\mathscr{A}_1(g) + \mathscr{M}_n^{11} V(g)},$$

易见有 $E' = g^* \mathscr{M}_p \cdot E'$. 据 Nakayama 引理,$E' = 0$,于是

$$M \subset T\mathscr{A}_1(g) + \mathscr{M}_n^{11} \cdot V(g). \tag{5}$$

再由引理 10.6.2,可导出

$$T\mathscr{A}_1(f) + M = T\mathscr{A}_1(g) + M.$$

利用(5)式,可得到

$$T\mathscr{A}_1(f) + \mathscr{M}_n^{11} V(f) = T\mathscr{A}_1(g) + \mathscr{M}_n^{11} V(g), \tag{6}$$

于是由引理 10.5.1 知，f 的任意 M-逼近 g 的 10-导网位于 f 的 $\mathscr{A}_1^{10}$-轨道中.

因为 $\mathscr{M}_n^6 V(f) \subset M$，由(5)和(6)式，有

$$\mathscr{M}_n^6 \cdot V(f) \subset T\mathscr{A}_1(f) + \mathscr{M}_n^{11} V(f).$$

据定理 10.4.1(i)，f 是 9-$\mathscr{A}_1$-决定的.

由上面的论证知道，f 的任意 M-逼近实际上必 $\mathscr{A}_1$-等价于 f，因此 f 是 M-$\mathscr{A}_1$-决定的.

决定性范围提供了一种方式用以描述什么样的映射芽可等价于一已知的映射芽或给定的标准形式. 并且对于有限 $\mathscr{A}$-决定的映射芽来说，决定性范围也是可以计算的. 然而决定性范围的研究不只限于有限 $\mathscr{A}$-决定的芽，它可以对一类称之为有限奇点型的映射芽来讨论.

下面的定理刻画了有限奇点型的映射芽的特征（参看文献[48]和[49]）.

定理 10.6.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，则下列诸断言是等价的：

(i) f 是有限奇点型的(简记为 FST)，

(ii) $\mathscr{M}_n^r \cdot V(f) \subset T_e\mathscr{K}(f)$ 对某一 $r < \infty$，

(ii)′ $\mathscr{M}_n^{r'} \cdot V(f) \subset T\mathscr{K}(f)$ 对某一 $r' < \infty$，

(iii) $\mathscr{M}_n^s \subset J_f + f^* \mathscr{M}_p \cdot \varepsilon_n$ 对某一 $s < \infty$，

这里 J_f 为 ε_n 中的理想，它由 f 的 Jacobi 矩阵 $\left[\dfrac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i}\right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ 的 $p \times p$ 子式的行列式生成. 当 $n < p$ 时，$J_f = 0$.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 映射芽 f 为 FST 是指存在 $g_1, \cdots, g_q \in V(f)$，使得

$$T_e\mathscr{A}(f) + f^* \varepsilon_p \{g_1, \cdots, g_q\} = V(f),$$

或

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \varepsilon_p \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f). \tag{1}$$

将 Malgrange 预备定理应用于有限生成的 ε_n-模 $V(f) \Big/ tf(V(\mathbb{R}^n))$，便可推出(1)式等价于

$$tf(V(\mathbb{R}^n)) + f^* \mathcal{M}_p \cdot V(f)$$
$$+ \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f),$$

或简写为

$$T_e \mathcal{K}(f) + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f, g_1, \cdots, g_q \right\} = V(f). \tag{2}$$

而(2)式意指 $d_e(f, \mathcal{K}) = \dim_{\mathbb{R}} V(f) \Big/ T_e \mathcal{K}(f) < \infty$，$f$ 是有限 $\mathcal{K}$-决定的. 据定理 10.3.1，(i)$\Leftrightarrow$(ii) (及(ii)$'$).

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 $u = u_1 \cdots u_p$，其中每一 $u_i \in \mathcal{M}_n^r$. 据(ii)，存在 $a_{ik} \in \varepsilon_n$，使得

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} = u_k \delta_{jk} \quad \mathrm{mod} f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n, \quad j, k = 1, \cdots, p.$$

因为 $p \times p$ 矩阵 $(u_k \delta_{jk})$ 的行列式等于 u，所以 u 和矩阵 $\left[\frac{\partial(y_j \circ f)}{\partial x_i} \right]$ 的诸 $p \times p$ 子式的行列式的线性组合(其系数取自 ε_n) $\mathrm{mod} f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n$ 相等. 于是

$$\mathcal{M}_n^{rp} \subset J_f + f^* \mathcal{M}_p \cdot \varepsilon_n.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii) 应用克莱姆法则，细节留给读者.

10.6.2 决定性范围的基本估计

本节的主要结果是

定理 10.6.2 设 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 是有限奇点型的，I 为 ε_n 中的理想. 若

$$I\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f),$$

则 f 是 I^3-$\mathscr{A}$-决定的.

注 当 $I=\mathscr{M}_n^r$ 时，本定理给出的决定性阶数估计弱于定理 10.4.1 所给的估计，其原因是一般情形下的逼近引理（例如引理 10.6.2 和 10.6.3）弱于§10.2 中的逼近引理.

一个有趣的特殊情形是取理想 $I=\mathscr{M}_n^\infty$. 由于 $(\mathscr{M}_n^\infty)^3=\mathscr{M}_n^\infty$，因此有下面的

推论 10.6.1 设 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 FST，满足

$$\mathscr{M}_n^\infty\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f),$$

则 f 是 $\mathscr{M}_n^\infty$-$\mathscr{A}$-决定的. 或者按照通常的记法，简记 f 为 ∞-$\mathscr{A}$-决定的.

10.6.3 证明定理 10.6.2 前的准备

设 M 为 $\varepsilon_n^{\times p}$ 的 $\mathbb{R}$-子空间，$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽. 一个 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,J\times0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,J\times0)$（其中 J 为 $\mathbb{R}$ 的连通子集）叫做由 f 的 M-逼近（对于 $\{y_1,\cdots,y_p\}$ 而言）组成的 $(\mathbb{R},J)$-族，如果

$$(y_1\circ G^a-y_1\circ f,\cdots,y_p\circ G^a-y_p\circ f)\in M\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times0},\quad\forall a\in J.$$

对 t 求导，得

$$\partial\cdot G^a\in M\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times0},\qquad\forall a\in J,$$

如以前所说，ε_n 视为 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,a\times0}$ 的子环，因而 M 可等同于 $(\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times0})^{\times p}$ 的一个 $\mathbb{R}$-子空间. 借助于这一等同，将 $\partial\cdot G^a$ 视为 $(\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times0})^{\times p}$ 中的一元.

引理 10.6.3 设 G 是由 f 的 M-逼近(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言)组成的$(\mathbb{R},a)$-族. 借助于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 作适当的等同,则有

1) $tG(\xi)-t(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)(\xi)\in \xi\cdot(M\cdot\varepsilon_{1+n})$, $\forall \xi\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$,

2) (a) $G^* y_i-(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)^* y_i\in M_i\cdot\varepsilon_{1+n}$, $i=1, \cdots, p$,

(b) $G^*\phi-(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)^*\phi\in(\bigcup_{i=1}^{p}M_i)\cdot\varepsilon_{1+n}$, $\forall\phi\in\varepsilon_{1+p}$,

(c) $wG(\eta)-w(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)(\eta)\in(\bigcup_{i=1}^{p}M_i)\cdot(\varepsilon_{1+n})^{\times p}$, $\forall\eta\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)$.

证 1) $tG(\xi)-t(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)(\xi)=\xi\cdot(y_1\circ G-y_1\circ f, \cdots, y_p\circ G-y_p\circ f)$, 上式右边理解为 $(\xi\cdot(y_1\circ G-y_1\circ f), \cdots, \xi\cdot(y_p\circ G-y_p\circ f))$, 并且 $\xi\cdot(y_j\circ G-y_j\circ f)$ 表示函数 $y_j\circ G-y_j\circ f$ 关于 ξ 的导数$(j=1, \cdots, p)$. 而$(y_1\circ G-y_1\circ f, \cdots, y_p\circ G-y_p\circ f)\in M\cdot\varepsilon_{1+n}$, 故结论真.

2) (a) 由定义可得. 对于(c),因 $wG(\eta)=\sum_{j=1}^{p}G^*\eta_i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\circ G$, 其中 $\eta=\sum_{j=1}^{p}\eta_j\frac{\partial}{\partial y_j}$, 故(c)可由(b)导出. 而(b)由下面的推论 10.6.2 得到.

定义 10.6.2 (i) 设 $f, g:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽, 定义映射芽 $(f, g):(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p, (0, 0))$ 为

$$(f, g)(x)=(f(x), g(x)),\ x\in(\mathbb{R}^n, 0).$$

(ii) 设 $S\subset\varepsilon_n$, $f\in\varepsilon^0(n, p)$. 定义 $(f, S)^*\varepsilon_{p+p}$(对于 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 而言)为诸子环 $(f, g)^*\varepsilon_{p+p}$ 的并,其中 $g\in\varepsilon^0(n, p)$ 合于 $y_j\circ g\in S(j=1, \cdots, p)$. 用式子表示,

$$(f, S)^*\varepsilon_{p+p}=\bigcup\{(f, g)^*\varepsilon_{p+p}\mid g\in\varepsilon^0(n, p)\ s.t.\ y_j\circ g\in S,\ j=1, \cdots, p\}.$$

引理 10.6.4 设 $S\subset\varepsilon_n$，$f\in\varepsilon^0(n,p)$. 若 $g\in\varepsilon^0(n,p)$使得 $y_i\circ g-y_i\circ f\in S$ $(i=1,\cdots,p)$，则对任意 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，有

$$(f,g)^*\phi-(f,f)^*\phi\in S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p},\tag{3}$$

进而有

$$(f;g)^*\varepsilon_{p+p}\subset f^*\varepsilon_p+S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p}.\tag{4}$$

证 若 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，则

$$\phi\circ(f,g)=\phi\circ\delta\circ(f,k),$$

其中 $k\in\varepsilon^0(n,p)$定义为 $y_i\circ k=y_i\circ f-y_i\circ g$ $(i=1,\cdots,p)$，并且 $\delta:(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))$定义为

$$\delta(y_1,\cdots,y_p;z_1,\cdots,z_p)=(y_1,\cdots,y_p;y_1-z_1,\cdots,y_p-z_p),$$

这里$\{z_1,\cdots,z_p\}$是第二个$(\mathbb{R}^p,0)$上所选取的坐标系.

由 Taylor 定理，每一 $\phi'\in\varepsilon_{p+p}$可写为

$$\phi'(y_1,\cdots,y_p;z_1,\cdots,z_p)=\phi'(y_1,\cdots,y_p,0)+\sum_{i=1}^p z_i\psi_i(y,z),$$

其中每一 $\psi_i\in\varepsilon_{p+p}$. 现令 $\phi\circ\delta=\phi'$，则

$$\begin{aligned}(f,g)^*\phi&=(f,k)^*\phi'\\&=(f,0)^*\phi'+\sum_{i=1}^p(z_i\circ k)\cdot(f,k)^*\psi_i\\&=(f,f)^*\phi+\sum_{i=1}^p(z_i\circ k)\cdot(f,k)^*\psi_i,\end{aligned}$$

故

$$(f,g)^*\phi-(f,f)^*\phi\in S\cdot(f,S)^*\varepsilon_{p+p}.$$

为证引理中的第二个式子，令 $\Delta:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p,(0,0))$定义为 $\Delta(y_1,\cdots,y_p)=(y_1,\cdots,y_p;y_1,\cdots,y_p)$，则 $\Delta^*:\varepsilon_{p+p}\to\varepsilon_p$

为环同态，并且对任意 $\phi\in\varepsilon_{p+p}$，

$$(f,\ f)^*\phi = \phi\circ(f,\ f) = \phi\circ\Delta\circ f = f^*\Delta^*\phi\in f^*\varepsilon_p,$$

从而(4)式成立.

推论 10.6.2 设 S,f 及 g 如引理 10.6.4 中所述，则对任意 $\phi\in\varepsilon_p$，

$$g^*\phi - f^*\phi\in S\cdot(f,\ S)^*\varepsilon_{p+p}.$$

特别，若 S 为ε_n 中理想，则 $g^*\phi - f^*\phi\in S$.

证 $g^*\phi - f^*\phi = (f,\ g)^*\tilde{\phi} - (f,\ f)^*\tilde{\phi}$，其中 $\tilde{\phi}\in\varepsilon_{p+p}$定义为$\tilde{\phi}(y,\ z)=\phi(z)$. 证毕.

T. Gaffney 曾考虑过 Malgrange 预备定理的一种较为奇特的表达形式，现陈述如下：

定理 10.6.3 设 $f,\ g:(\mathbb{R}^n,\ 0)\to(\mathbb{R}^p,\ 0)$为 C^∞ 映射芽. 假设 A 是有限生成的$(f,\ g)^*\varepsilon_{p+p}$-模，那么 A 的有限子集 S 是 A 的一个 $g^*\varepsilon_p$-生成集当且仅当 S 的元素经投影组成实向量空间 $A\big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A$ 的生成集.

证 A 作为$(f,\ g)^*\varepsilon_{p+p}$-模是有限生成的，也就是说借助于$(f,\ g)^*$所诱导的作用(该作用记为*)，$A$ 是有限生成的ε_{p+p}-模.

令 $\pi_2:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ 表到第二个因子上的投影. 由

$$\varepsilon_p \xrightarrow{\pi_2^*} \varepsilon_{p+p} \xrightarrow{(f,\ g)^*} \varepsilon_n,$$

有$(\pi_2^*\mathscr{M}_p)^*\cdot A = (f,\ g)^*\pi_2^*\mathscr{M}_p\cdot A = (\pi_2\circ(f,\ g))^*\mathscr{M}_p\cdot A = g^*\mathscr{M}_p\cdot A$，因此

$$A\big/(\pi_2^*\mathscr{M}_p)^*\cdot A = A\big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A.$$

根据 Malgrange 预备定理，S 是 $\pi_2^*\varepsilon_p$-模 A 的生成集当且仅当 S

的元素经投影形成实向量空间$A\Big/(\pi_2^*\mathscr{M}_p)^*\cdot A$，即$A\Big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A$的生成集．然而$A$作为$\pi_2^*\varepsilon_p$-模由$S$所生成当且仅当$A$作为$g^*\varepsilon_p$-模由$S$所生成，这是因为$(\pi_2^*\phi)^*\cdot a=(f,g)^*\pi_2^*\phi\cdot a=g^*\phi\cdot a$，$\forall\phi\in\varepsilon_p$，$\forall a\in A$，于是$S$是$A$的一个$g^*\varepsilon_p$-生成集当且仅当$S$经投影组成实向量空间$A\Big/g^*\mathscr{M}_p\cdot A$的生成集．

命题 10.6.1 设C^∞映射芽$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为FST，则对所有非负整数$k$并且对任意实数$a$，

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,a\times 0}=\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,a\times 0}+(1_{(\mathbb{R},a)}\times f)^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,a\times 0}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}^n}.$$

证 存在满同态

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\Big/(\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})$$

$$\to\varepsilon_n\Big/(\mathscr{M}_n^k\cdot J_f+f^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_n),\tag{5}$$

它由在$a\times\mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^n$上的限制所给出．事实上它还是一个同构，因为限制映射$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\to\varepsilon_{\mathbb{R}^n}$的核为$\mathscr{M}_{\mathbb{R}}$，且$\mathscr{M}_{\mathbb{R}}\subset(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$．

因f为FST，据定理10.6.1(i)⇒(iii)，(5)式右边的维数有限．设$\phi_1,\cdots,\phi_q\in\varepsilon_n$在

$$\varepsilon_n\Big/(\mathscr{M}_n^k\cdot J_f+f^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon_n)$$

中的投影组成它的基．另外，由(5)式的左边，考虑$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$-模$A=\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\Big/\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$，它是有限生成的．借助于$(1_{\mathbb{R}}\times f)^*$，可以看作$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模．因为

$$A\Big/(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot A\cong$$

$$\frac{\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}}{(\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})}$$

据 Malgrange 预备定理,A 是有限生成的$(1_{\mathbb{R}}\times f)^{*}\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模,并且从上述讨论知,$\phi_1,\cdots,\phi_q$ 可视为A 的$(1_{\mathbb{R}}\times f)^{*}\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-基,从而

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^{*}\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\{\phi_1,\cdots,\phi_q\},$$

更不待说,有

$$\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=\mathscr{M}_n^k\cdot J_f\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}+(1_{\mathbb{R}}\times f)^{*}\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}^n}.$$

引理 10.6.5 设 C^∞芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 FST. 若$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,(a,0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,(a,0))$使得

$$T\mathscr{K}(G)=T\mathscr{K}(F),$$

其中 $F=1_{(\mathbb{R},a)}\times f$, 则 G 为 FST.

证 因 f 为 FST,据定理 10.6.1,

$$\mathscr{M}_n^r\cdot V(f)\subset T\mathscr{K}(f)\quad 对某个\ r<\infty,$$

用 ε_{1+n}中的元素乘上式两边,可导出

$$\mathscr{M}_n^r.\psi(F)\subset T\mathscr{K}(F).$$

将 $\psi(G)$与 $\psi(F)$等同,又因 $T\mathscr{K}(G)=T\mathscr{K}(F)$, 故

$$\mathscr{M}_n^r\cdot\psi(G)\subset T\mathscr{K}(G).$$

由于 G 是$\mathbb{R}$-水平保持的,$G(t,x)=(t,g(t,x))$, 即 $t=t\circ G$, 其中 t 表投影. 又 $wF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-tF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\in\psi(F)$,故可推出

$$(\mathscr{M}_n^r+t)\cdot V(G)\subset T_e\mathscr{K}(G),$$

据定理 10.6.1,G 为 FST.

定理 10.6.4 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 FST,并且 ε_n 中的理想 I 使得

$$I\cdot V(f)\subset T\mathscr{A}(f).\tag{6}$$

假定 G 是由 f 的 I-逼近组成的$(\mathbb{R},[0,1])$-族,且使得

$$
\begin{aligned}
T\mathscr{A}(G^a) &\subset T\mathscr{A}(F^a) \\
&\subset T\mathscr{A}(G^a) \\
&\quad + (G^a)^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F^a), \ \forall a \in [0, 1], \quad (7)
\end{aligned}
$$

这里 $F^a = 1_{(\mathbb{R}, a)} \times f$,那么 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的.

证 设 $a\in[0, 1]$. 下面的论证仅涉及在$(a, 0)$处的芽,为简单起见. 凡上标 a 皆省去.

易见 $J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} = J_F$,并且依克莱姆法则,$J_F \cdot \psi(F) \subset tF(\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$,所以

$$
\{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\} \cdot T\mathscr{A}(f) = T\mathscr{A}(F).
$$

另外,有

$$
\begin{aligned}
&\{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\} \cdot I \cdot V(f) \\
&= \{J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}^n}\} \cdot I \cdot V(f) \\
&= \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \cdot I \cdot V(f) \\
&= I \cdot \psi(F).
\end{aligned}
$$

用 $J_f \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} + F^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$ 乘(6)式得

$$
I \cdot \psi(F) \subset T\mathscr{A}(F). \quad (8)
$$

如果能证明

$$
T\mathscr{A}(F) = T\mathscr{A}(G), \quad (9)
$$

则 $I\cdot\psi(G)\subset T\mathscr{A}(G)$. 由于 G 是由 f 的 I-逼近组成的$(\mathbb{R},[0,1])$-族,因此对任意 $a\in[0, 1]$,$\partial\cdot G^a \in I\cdot\psi(G^a)$. 因前面的论证省去上标 a, 所以由 $I\cdot\psi(G^a)\subset T\mathscr{A}(G^a)$得到

$$
\partial \cdot G^a \in T\mathscr{A}(G^a), \quad \forall a \in [0, 1],
$$

从而 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的. 余下证明(9)式成立.

对任意 $a\in[0,1]$,

$(y_1\circ G^a-y_1\circ F^a,\cdots,y_p\circ G^a-y_p\circ F^a)\in(I)^{\times p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\,a\times 0}$.

以下略去上标 a. 据引理 10.6.4,

$$(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}\subset F^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}+I\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n},$$

因而

$$\begin{aligned}(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}\cdot T\mathscr{A}(F)&\subset T\mathscr{A}(F)+I\cdot\psi(F)\\&\subset T\mathscr{A}(F),\qquad\text{(据(8) 式)}\end{aligned}$$

这说明 $T\mathscr{A}(F)$是一个$(F,G)^*\varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模,并且还是一个 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模.

令 $E=T\mathscr{A}(F)\big/T\mathscr{A}(G)$, 它是一个 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模,并且从(7)式可推出

$$E=G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot E.$$

若 E 是有限生成的,据 Nakayama 引理, $E=0$,从而 $T\mathscr{A}(F)=T\mathscr{A}(G)$,这正是所要证明的. 因此余下的任务便是证明 $G^*\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模 E 是有限生成的.

用 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$ 乘(7)式,得

$$T\mathscr{K}(G)\subset T\mathscr{K}(F)\subset T\mathscr{K}(G)+G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot T\mathscr{K}(F),$$

应用 Nakayama 引理可导出

$$T\mathscr{K}(F)=T\mathscr{K}(G),$$

依引理 10.6.5, G 为 FST,再据定理 10.6.1, (i)⇒(iii),存在 $r<\infty$,使得

$$\mathscr{M}^r_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\subset J_G+G^*\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}.$$

又因 $\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}=(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}+\langle t\rangle)\cdot\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$,故

$$\mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}^{r+1} \subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n},$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}}{(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n})} < \infty. \tag{10}$$

而 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 是有限生成的 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$-模,根据 Malgrange 预备定理,由(10)式可得出 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模也是有限生成的. 设 $h_1, \cdots, h_q \in \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}$ 在 $\varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} \big/ \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G$ 中的投影形成它的生成集.

令 $E' = T\mathscr{A}(F) \big/ tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$, 它是一个 $(F,G)^* \varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模,由

$$tF\left(h_i \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, \cdots, q, \ j = 1, \cdots, n.$$

$$wF\left(y_k \frac{\partial}{\partial y_l}\right), \quad k, l = 1, \cdots, p$$

所生成,这是因为

$$\begin{aligned} tF(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) &\subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot J_G \cdot \psi(F) \\ &\subset \mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot tG(\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) \\ &= tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)), \end{aligned}$$

于是 E'是有限生成的$(F,G)^* \varepsilon_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}$-模. 据定理 10.6.3, E'作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模是有限生成的当且仅当向量空间 $E' \big/ G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'$的维数有限. 而

$$\frac{E'}{G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'} \cong \frac{T\mathscr{A}(F)}{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F)}$$

$$= \frac{T\mathscr{A}(G) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot T\mathscr{A}(F)}{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}(T\mathscr{A}(F) + T\mathscr{A}(G))}$$

$$= \frac{uG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) + \{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} T\mathscr{A}(F)\}}{uG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)) + \{tG(\mathscr{M}_{\mathbb{R}^n}\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)) + G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} T\mathscr{A}(F)\}}$$

(第二个等式是根据(7)式及 $T\mathscr{A}(F)$ 为 $G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模这一事实)，从而

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{E'}{G^* \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot E'}$$

$$\leqslant \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)}{\mathscr{M}_{\mathbb{R}^p} \cdot \mathscr{M}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p} \cdot \psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p)} = p^2,$$

由此可知，E' 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模是有限生成的.

因为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-同态 $E' \to E$ 是满的，所以 E 作为 $G^* \varepsilon_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p}$-模也是有限生成的. 根据前面的分析，定理得证.

10.6.4 定理 10.6.2 的证明

本段将证明一个比定理 10.6.2 更一般的结果.

定理 10.6.5 设 C^∞ 芽 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ 为 FST，I 为 ε_n 中的理想. 若

$$I^k V(f) \subset T\mathscr{A}(f), \quad k \geqslant 1,$$

则 f 是 I^{2k+1}-$\mathscr{A}$-决定的.

注 当 $k=1$ 时，它就是定理 10.6.2.

证 关键是证明 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的任意$(\mathbb{R}, [0, 1])$-族必是 $\mathscr{A}$-平凡的，由此可推得本定理成立. 事实上，假设 g 是 f 的 I^{2k+1}-逼近，则 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的$(\mathbb{R}, [0, 1])$-族 G 可构作如下：令

$$y_i \circ G = (1-t) \cdot y_i \circ f + t \cdot y_i \circ g,$$

$$i = 1, \cdots, p, \ t \circ G = t,$$

其中$\{y_1, \cdots, y_p\}$为$(\mathbb{R}^p, 0)$的局部坐标系，t 为$\mathbb{R}$上的标准坐标函数.

若上述 G 是 $\mathscr{A}$-平凡的，则 $f=G_0$ 必 $\mathscr{A}$-等价于 $g=G_1$.

设 $a\in[0,1]$. 下面的论证只涉及在 $(a,0)$ 处的芽，为简单起见，将上标 a 省去.

如定理 10.6.4 证明开始部分那样，首先有

$$I^k\cdot\psi(F)\subset T\mathscr{A}(F), \tag{11}$$

这里 $F=1_{(\mathbb{R},a)}\times f$.

假设 G 是由 f 的 I^{2k+1}-逼近组成的任意 $(\mathbb{R},[0,1])$-族. 依引理 10.6.3，并注意到当 $\xi\in\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ 时，$\xi\cdot(I^{2k+1})^{\times p}\cdot\varepsilon_{1+n}\subset(I^{2k})^{\times p}\cdot\varepsilon_{1+n}$，因而有

$$T\mathscr{A}(G)\subset T\mathscr{A}(F)+I^{2k}\cdot\psi(F), \tag{12}$$

$$T\mathscr{A}(F)\subset T\mathscr{A}(G)+I^{2k}\cdot\psi(G). \tag{13}$$

由(11)与(12)式可得出

$$T\mathscr{A}(G)\subset T\mathscr{A}(F), \tag{14}$$

将(11)式乘以 I^k，得

$$I^{2k}\cdot\psi(F)\subset I^k\cdot T\mathscr{K}(F).$$

据引理 10.6.3，

$$\begin{aligned}T\mathscr{K}(F)&\subset T\mathscr{K}(G)+I^{2k}\cdot\psi(F)\\&\subset T\mathscr{K}(G)+\mathscr{M}_nT\mathscr{K}(F),\end{aligned}$$

使用 Nakayama 引理可得到

$$T\mathscr{K}(F)\subset T\mathscr{K}(G),$$

于是有

$$I^{2k}\cdot\psi(G)\subset I^k\cdot T\mathcal{K}(G)$$

$$\subset tG(\mathcal{M}_n\psi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))+G^*\mathcal{M}_p\cdot(I^k\cdot\psi(G)),$$

将(13)式中的 $I^{2k}\psi(G)$用上式右边代替,并利用(11)式,得

$$T\mathscr{A}(F)\subset T\mathscr{A}(G)+G^*\mathcal{M}_p\cdot(I^k\cdot\psi(G))$$

$$\subset T\mathscr{A}(G)+G^*\mathcal{M}_p\cdot T\mathscr{A}(F).$$

由上式及(14)式,并将略去的上标 a 重新写上,有

$$T\mathscr{A}(G^a)\subset T\mathscr{A}(F^a)$$

$$\subset T\mathscr{A}(G^a)+(G^a)^*\mathcal{M}_p\cdot T\mathscr{A}(F^a)\quad\forall a\in[0,1].$$

根据定理 10.6.4,G 是 $\mathscr{A}$-平凡的. 按照前面的分析,本定理获证.

§10.7 $G_{q,k}$-决定性

本节将在 $\varepsilon^0(n,p)$中建立一种新的等价关系,它是通过引入群 $G_{q,k}$对$\varepsilon^0(n,p)$的作用来定义的. 这一节的主要目标是给出 $G_{q,k}$-决定性的基本结果,见文献[40].

10.7.1 群 $G_{q,k}$及在$\varepsilon^0(n,p)$上的作用

设 G^q为一般线性群$GL(p,\mathbb{R})$的 q 维 Lie 子群,e 为单位元. 把从$\mathbb{R}^n$ 到 G^q 的C^∞映射 τ(合于 $\tau(0)=e$)在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 处的芽所成之群记为 G_q, 即 $G_q=\{\tau:(\mathbb{R}^n,0)\to(G^q,e)\}$. 令集

$$G_{q,k}=G_q\times\mathscr{R}_k,$$

这里 $\mathscr{R}_k$ 为右等价群 $\mathscr{R}$ 的正规子群,其定义见§10.4. 群 $G_{q,k}$的乘法运算规定如下:设(τ_1,h_1), $(\tau_2,h_2)\in G_{q,k}$,令

$$(\tau_1,h_1)\cdot(\tau_2,h_2)=(\tau_1\cdot(\tau_2\circ h_1^{-1}),h_1\circ h_2).$$

群 $G_{q,k}$ 在 $\varepsilon^0(n, p)$ 上的作用定义为：若 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，$f\in \varepsilon^0(n, p)$，则 $(\tau, h)\cdot f=\tau\cdot(f\circ h^{-1})$.

现设 $f,g\in\varepsilon^0(n, p)$. 若存在 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，使得 $g=(\tau, h)\cdot f$，则称 g $G_{q,k}$-等价于 f. 易见它是 $\varepsilon^0(n, p)$ 中的一种等价关系.

特别，当 $q=0$ 因而 $G^0=\{e\}$ 时，$G_{0,k}$ 就是群 $\mathscr{R}_k$；而当 $k=0$ 且 $q=p^2$ 因而 $G^{p^2}=\mathrm{GL}(p, \mathbb{R})$ 时，根据命题 8.4.1 和推论 8.4.1，$G_{p^2,0}$ 为接触等价群 $\mathscr{K}$.

10.7.2 C^∞ 芽的 $G_{q,k}$-决定性

定义 10.7.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为 C^∞ 映射芽，I 为 ε_n 中理想. 如果对于 f 的任意一个 I-逼近 $g\in\varepsilon^0(n, p)$，存在 $(\tau, h)\in G_{q,k}$，使得 $(\tau, h)\cdot g=f$，则说 f 是 I-$G_{q,k}$-决定的.

注 $\mathscr{M}_n^{r+1}$-$G_{q,0}$-决定(此时 $k=0$，$I=\mathscr{M}_n^{r+1}$) 就是文献[12]中所研究的 r-V_q-决定.

对给定的 $f\in\varepsilon^0(n, p)$，用 $J(f)$ 表示由 $\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ 生成的 ε_n-模. 又 ε_n-模 $\tau_q(f)$ 定义如下：当 $1\leqslant q\leqslant p^2$ 时，令

$$\tau_q(f)=\varepsilon_n\{A_1 f,\cdots, A_q f\},$$

其中 $p\times p$ 实矩阵 $A_i(i=1, \cdots, q)$ 为群 G^q 的 Lie 代数 T_eG^q 的基；而当 $q=0$ 时，约定 A_0 为零矩阵，$\tau_0(f)$ 为零模.

读者不难看出

$$\mathscr{M}_n^{k+1}J(f)+\mathscr{M}_n\tau_q(f)$$

是群 $G_{q,k}$-轨道 $G_{q,k}\cdot f$ 在 f 处的切空间.

现设 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, (a, 0))(a\in\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽，因而 F 可表示为 $F(t, x)=(t, f_t(x))$，$(t, x)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))$. 记 $\pi:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, (a,0))\to(\mathbb{R}^p, 0)$ 为自然投影. 我们形式上规定

$$\overline{J}(F) = \varepsilon_{n+1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\pi \circ F), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(\pi \circ F)\right\},$$

$$\overline{\tau}_q(F) = \begin{cases} \varepsilon_{n+1}\{A_1(\pi \circ F), \cdots, A_q(\pi \circ F)\}, 1 \leqslant q \leqslant p^2, \\ 0, q = 0, \end{cases}$$

这里 A_1, …, A_q 为 Lie 代数 T_eG^q 的基.

定义 10.7.2 一个$\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p, [0, 1]\times 0)$称为 $G_{q,k}$-平凡的,如果存在

(i) $\mathbb{R}$-水平保持的微分同胚芽 $H:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)$, $H(t, x)=(t, h_t(x))$合于 $h_t\in\mathscr{R}_k$, $t\in[0, 1]$,以及

(ii) $\mathbb{R}$-水平保持的映射芽 $T:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, [0, 1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times G^q, [0, 1]\times e)$, $T(t, x)=(t, \tau_t(x))$, 使得

$$T\cdot(F\circ H) = 1_{(\mathbb{R}, [0, 1])}\times f,$$

其中 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为某一 C^∞芽.

引理 10.7.1 芽 F 是$G_{q,k}$-平凡的当且仅当对每一 $a\in[0, 1]$,有

$$\partial\cdot F^a \in \mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F^a) + \mathscr{M}_n\cdot\overline{\tau}_q(F^a),$$

其中 F^a为F 在$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, (a, 0))$上的限制.

证明留作练习.

定理 10.7.1 设 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$为 C^∞芽, I 为ε_n 中理想. 若

$$I^r\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot J(f) + \mathscr{M}_n\cdot\tau_q(f),\ r\geqslant 1, \quad (1)$$

则 f 是I^{r+2}-$G_{q,k}$-决定的.

特别,当理想 $I=\mathscr{M}_n^{r+1}$ 时,有

定理 10.7.2 设 $0\leqslant k\leqslant r$, $r>0$. 若 C^∞芽 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^p, 0)$,使得

$$\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}J(f)+\mathscr{M}_n\tau_q(f)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot V(f),$$

则 (i)当 $k\geqslant 1$ 时，f 是 r-$G_{q,k}$-决定的，

(ii) 当 $k=0$ 时，f 是 $(r+1)$-V_q-决定的.

注 当 I 为 $\mathscr{M}_n$ 的某次幂时，最好使用定理 10.7.2，因就决定性阶数估计而言，用定理 10.7.2 比定理 10.7.1 要精细些.

下面证明定理 10.7.1，而将定理 10.7.2 的证明留给读者练习.

定理 10.7.1 的证 设 $g\in\varepsilon^0(n,p)$ 为 f 的一个 I^{r+2}-逼近. 令 $F=1_{(\mathbb{R},[0,1])}\times f$，$S:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,[0,1]\times 0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p,[0,1]\times 0)$定义为

$$S(t,x)=(t,s_t(x)),$$

$$y_i\circ s_t(x)=(1-t)\cdot y_i\circ f(x)+t\cdot y_i\circ g(x),$$

$$i=1,\cdots,p,\ t\in[0,1].$$

如果能证明 S 是 $G_{q,k}$-平凡的，则 $f=s_0$ 与 $g=s_1$ 是 $G_{q,k}$-等价的，因此 f 是 I^{r+2}-$G_{q,k}$-决定的. 下面利用引理 10.7.1 来证 S 的 $G_{q,k}$-平凡性.

任取 $a\in[0,1]$. 因余下的论证只涉及在点$(a,0)$处的映射芽，为简便计，将上标 a 全删去.

用 ε_{n+1}中的元素乘(1)式，得

$$I^r\psi(F)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)+\mathscr{M}_n\cdot\overline{\tau}_q(F).\tag{2}$$

由引理 10.6.3，

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(S)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)+I^{r+1}\cdot\psi(F),\tag{3}$$

$$\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(F)\subset\mathscr{M}_n^{k+1}\cdot\overline{J}(S)+I^{r+1}\cdot\psi(S).\tag{4}$$

直接计算，有

$$\overline{\tau}_q(S)\subset\overline{\tau}_q(F)+I^{r+2}\cdot\psi(F),\tag{5}$$

$$\overline{\tau}_q(F) \subset \overline{\tau}_q(S) + I^{r+2} \cdot \psi(S). \tag{6}$$

由(2)和(3)及(5)式可推出

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S) \subset \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F).$$

令

$$E = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F)}{\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S)},$$

它是一个有限生成的 ε_{n+1}-模. 由(2)、(4)、(6)式及 $I \subset \mathcal{M}_n$ 可得

$$\mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(F) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(F) \subset \mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(S) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(S)$$
$$+ \mathcal{M}_n \cdot (\mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(F) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(F)),$$

于是有 $E = \mathcal{M}_n \cdot E$. 据 Nakayama 引理, $E=0$, 从而

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F) = \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S).$$

以上的论证均省去上标 a, 因此上式为

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(F^a) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(F^a) = \mathcal{M}_n^{k+1} \cdot \overline{J}(S^a) + \mathcal{M}_n \cdot \overline{\tau}_q(S^a),$$
$$\forall a \in [0, 1]. \tag{7}$$

因为 S 是由 f 的 I^{r+2}-逼近组成的($\mathbb{R}$, [0, 1])-族, 因此对任意 $a \in$ [0,1],

$$\partial \cdot S^a \in I^{r+2}\psi(S^a) = I^{r+2}\psi(F^a),$$

从而由(2)和(7)式得到

$$\partial \cdot S^a \in \mathcal{M}_n^{k+1}\overline{J}(S^a) + \mathcal{M}_n\overline{\tau}_q(S^a).$$

根据引理 10.7.1, S 是 $G_{q,k}$-平凡的.

10.7.3 几个推论

推论 10.7.1 若 $f \in \varepsilon^0(n, p)$ 使得

$$\mathcal{M}_n^{\infty} \cdot V(f) \subset \mathcal{M}_n \cdot J(f) + \mathcal{M}_n\tau_q(f),$$

则 f 是 $\mathcal{M}_n^\infty$-$G_{q,0}$-决定的，即 f 是∞-V_q-决定的.

证 在定理 10.7.1 中取 $I=\mathcal{M}_n^\infty$ 及 $k=0$，由(1)式及$(\mathcal{M}_n^\infty)^3=\mathcal{M}_n^\infty$ 即得.

注意到 $G_{0,k}$-决定性就是 $\mathcal{R}_k$-决定性，因此由定理 10.7.1 与定理 10.7.2 立即得到下面的

推论 10.7.2 设 f: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}, 0)$为 C^∞ 函数芽.

(i) 若 $I^r\cdot V(f)\subset\mathcal{M}_n^{k+1}J(f)$，则 f 是I^{r+2}-$\mathcal{R}_k$-决定的，

(ii) 若 $\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot V(f)\subset\mathcal{M}_n^{k+1}\cdot J(f)+\mathcal{M}_n^{r+2}\cdot V(f)$，则(a)当 $k\geqslant1$时，f 是r-$\mathcal{R}_k$-决定的；(b) 当 $k=0$ 时，f 是$(r+1)$-$\mathcal{R}$-决定的.

注 上述结论(i)与文献[74]中定理 B 相一致. 结论(ii)中(b)就是文献[22]中定理 2.

因为 $G_{p^2,0}$-决定性就是 $\mathcal{K}$-决定性，由定理 10.7.1 与 10.7.2 自然可导出 $\mathcal{K}$-决定性的相应结论. 留给读者补述.

第十一章　Thom-Boardman 奇点

在§2.5中曾对 C^∞ 映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 引入 Thom 一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$，它使我们可以利用 f 的微分的秩来区分奇点类型. $x\in\Sigma^i(f)$说明 f 在点 x 有 Σ^i 类奇点. 但是仅仅使用 Σ^i 来区分奇点是不够的，例如余维不小于1的光滑函数$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的每一个奇点（即临界点）都属于 Σ^n 类，至于临界点是非退化的还是退化的尚不能区分. 又如 Whitney 映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$(x,y)\mapsto\left(x,xy-\frac{1}{3}y^3\right)$的奇点集 $\Sigma^1(f)$是平面上抛物线 $x=y^2$，它包含折叠点与尖点. 利用二阶奇点集，尖点属于 $\Sigma^{1,1}$类，而折叠则属于 $\Sigma^{1,0}$类. 因此有必要将 Σ^i 再作分解以得到更精细的不变量.

本章在引入 Thom 和 Boardman 意义下的奇点集之后，介绍了 Boardman 关于 Thom-Boardman 奇点的几个主要结果，并且联系映射芽的开折，为进一步讨论稳定映射芽的分类作准备. 本章第4节说明应用映射芽的 Boardman 符号可对映射芽的 $\mathscr{K}$-等价提供有效判断.

§11.1　Thom 和 Boardman 意义下的奇点集

11.1.1　$\Sigma^I(f)$的 Thom 定义

设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，若一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$为$\mathbb{R}^n$ 的子流形，则可引入二阶奇点集 $\Sigma^{i,j}(f)=\Sigma^j(f|\Sigma^i(f))$. 并且这一过程可以继续，假若二阶奇点集 $\Sigma^{i,j}(f)$是子流形，则引入三阶奇点集 $\Sigma^{i,j,k}(f)=\Sigma^k(f|\Sigma^{i,j}(f))$，等等. 一般地，对于任意一组非负整数 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，归纳定义 Thom 高阶奇点集 $\Sigma^I(f)$如下：

定义 11.1.1　设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射，$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$为

任意一组非负整数.若 $\Sigma^I(f)=\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(f)$为$\mathbb{R}^n$ 中光滑子流形，则集

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}}(f) = \Sigma^{i_{k+1}}(f\big|\Sigma^I(f))$$

由满足下列条件的点 $x\in\mathbb{R}^n$ 组成,其中 $f|\Sigma^I(f)$在点 x 的微分的核具有维数 i_{k+1}.

依 Thom 的方法定义的奇点集 $\Sigma^I(f)$不必为流形(见§2.5中例 2),因此不能期望对所有 f,都可以定义 $\Sigma^I(f)$. 其实 Thom 在引入这些集时已经注意到这一令人不悦的现象.克服这一困难的办法曾在§2.5 中就特殊情形作过介绍:在 $J_{n,p}^{1,0}\equiv L(n,p)$中定义子流形 Σ^i,其余维数为 $i(p-n+i)$,它不依赖于任何 f. 如果 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 是好映射,即 $j_0^1f:\mathbb{R}^n\to J_{n,p}^{1,0}$与所有子流形 Σ^i 相横截,那么 $\Sigma^i(f)=(j_0^1f)^{-1}(\Sigma^i)$,并且它是$\mathbb{R}^n$ 中余维为 $i(p-n+i)$的子流形. Thom 曾建议对于 k 阶奇点集$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f)$,也仿照上述过程来作,即在导网空间 $J_{n,p}^{k,0}$中定义子流形$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$,使得当 f 为好映射(或说"generic"映射)时,有

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f) = (j_0^kf)^{-1}(\Sigma^{i_1\cdots,i_k}),$$

它是$\mathbb{R}^n$ 中微分子流形. 当 $k=2$ 时曾被 Levine 解决[38]. 而对于一般情形,则由 Boardman 所解决[6]. Boardman 使用了导网空间的语言给 $\Sigma^I(f)$以另一定义. 对任意一组非负整数 $I=(i_1,\cdots,i_k)$,他在 $J_{n,p}^{k,0}$中定义了子集Σ^I 而不依赖于任何映射f,采用的方法是理想的 Jacobi 扩张.

11.1.2 Σ^I 的 Boardman 定义

定义 11.1.2 设 $y_1,\cdots,y_n$ 是$\mathbb{R}^n$ 中的坐标系,$\mathscr{I}$为代数 ε_n 中的一个有限生成理想,生成元为 $f_1,\cdots,f_p$. 对于整数 $s\geqslant1$,定义 $\Delta_s\mathscr{I}$为理想 $\mathscr{I}+\mathscr{I}'$,其中 $\mathscr{I}'$是由 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

的所有 s 阶子式(意指矩阵(1)的 $s\times s$ 子矩阵的行列式)生成的理想. $\Delta_s\mathcal{I}$称为理想 $\mathcal{I}$的 Jacobi 扩张.

命题 11.1.1 理想 $\Delta_s\mathcal{I}$既不依赖于 $\mathcal{I}$的生成元的选取,又不依赖于$\mathbb{R}^n$中的坐标系的选取. 即若 $g_1,\cdots,g_q$ 为 $\mathcal{I}$的另一组生成元, $z_1,\cdots,z_n$ 为另一坐标系,则由 $\mathcal{I}$以及 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial z_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

的 $s\times s$ 子式生成的理想和$\Delta_s\mathcal{I}$相一致.

证 显然只须证明(2)式的任意 $s\times s$ 子式位于$\Delta_s\mathcal{I}$之中. 因为每一 g_i 可以写作诸 f_k 的线性组合,系数取自 ε_n,所以每一$\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$可写为诸$\frac{\partial f_k}{\partial z_j}$(与 f_k 相同)的线性组合再加上 $\mathcal{I}$的一个元素. 利用行列式的重线性性质,可知(2)式的任意 $s\times s$ 子式位于由 $\mathcal{I}$和 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{bmatrix} \tag{3}$$

的 $s\times s$ 子式生成的理想中，于是只要证明(3)式的任意 $s\times s$ 子式位于 $\Delta_s\mathscr{I}$ 中就行了. 应用链法则，每一 $\frac{\partial}{\partial z_j}$ 可写为诸 $\frac{\partial}{\partial y_k}$ 的线性组合，系数取自 ε_n. 再一次应用行列式的重线性性质便得到所要求的结论. 证毕.

当 $s>n$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\mathscr{I}$. 又存在下列理想的包含关系：

$$\Delta_{k+1}\mathscr{I}\subset\Delta_k\mathscr{I},\quad k=1,2,\cdots,$$

这只要对行列式按行展开便可导出. 从而有

$$\mathscr{I}\subset\Delta_n\mathscr{I}\subset\Delta_{n-1}\mathscr{I}\subset\cdots\subset\Delta_1\mathscr{I}. \tag{4}$$

例 1 设 ε_1 中的理想 $\mathscr{I}=\langle x^k\rangle, k\geqslant 1$，则 $\Delta_1\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 Jacobi 矩阵 (kx^{k-1}) 的一阶子式生成，因而 $\Delta_1\mathscr{I}=\langle x^{k-1}\rangle$，并且当 $s\geqslant 2$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\langle x^k\rangle$.

例 2 设 $\mathscr{I}=\langle x^2-y^2, xy\rangle$ 为 ε_2 中理想，则 $\Delta_1\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

的一阶子式生成，因此 $\Delta_1\mathscr{I}=\langle x, y\rangle$. $\Delta_2\mathscr{I}$ 由 $\mathscr{I}$ 及 $\det\begin{bmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}=2(x^2+y^2)$ 生成，显然 $\Delta_2\mathscr{I}=\langle x^2, xy, y^2\rangle$. 又当 $s\geqslant 3$ 时，$\Delta_s\mathscr{I}=\mathscr{I}$.

对于 ε_n 中理想 $\mathscr{I}$，令

$$\Delta^s\mathscr{I}=\Delta_{n-s+1}\mathscr{I}.$$

由理想的上升序列(4)知，$\mathscr{I}$ 的相继 Jacobi 扩张 $\Delta^1\mathscr{I}, \Delta^2\mathscr{I}, \cdots, \Delta^n\mathscr{I}$ 满足下列包含关系：

$$\mathscr{I}=\Delta^0\mathscr{I}\subset\Delta^1\mathscr{I}\subset\Delta^2\mathscr{I}\subset\cdots\subset\Delta^n\mathscr{I}. \tag{5}$$

定义 11.1.3 设 $\mathscr{I}$ 为 ε_n 中真理想，$\mathscr{I}$ 的 Jacobi 扩张 $\Delta^k\mathscr{I}$ 叫做临界的，如果 $\Delta^k\mathscr{I}\neq\varepsilon_n$ 且 $\Delta^{k+1}\mathscr{I}=\varepsilon_n$. 特别，若 $\Delta^n\mathscr{I}\neq\varepsilon_n$，则 $\Delta^n\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张.

换言之，$\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张是指在序列(5)中，按从左到右的顺序排在最右边的真理想.

假定 $\Delta^{i_1}\mathscr{I}$ 是 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张. 重复上述过程得到它的相继 Jacobi 扩张以及临界 Jacobi 扩张 $\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}$. 如此继续下去，可获得 $\mathscr{I}$ 的相继临界 Jacobi 扩张的上升序列

$$\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\Delta^{i_3}\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}\mathscr{I}\subset\cdots,$$

则称理想 $\mathscr{I}$ 具有 Boardman 符号 $(i_1,i_2,i_3,\cdots)$.

例 3 例 1 中的理想 $\mathscr{I}=\langle x^k\rangle\subset\varepsilon_1$ 的相继临界 Jacobi 扩张为

$$\Delta^1\mathscr{I}=\langle x^{k-1}\rangle,\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}=\langle x^{k-2}\rangle,\cdots,\underbrace{\Delta^1\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)个}\mathscr{I}$$

$$=\langle x\rangle,\Delta^0\underbrace{\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)个}\mathscr{I}=\underbrace{\Delta^1\cdots\Delta^1}_{(k-1)个}\mathscr{I},$$

所以 $\mathscr{I}$ 的 Boardman 符号为 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{(k-1)个},1,0,\cdots)$.

例 4 设 ε_4 中的理想 $\mathscr{I}$ 由 x_1,x_2,x_3^2,x_4^2 生成，这 4 个生成元的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2x_3&0\\0&0&0&2x_4\end{bmatrix},$$

易见 $\mathscr{I}$ 的临界 Jacobi 扩张为 $\Delta^2\mathscr{I}=\Delta_3\mathscr{I}=\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle=\mathscr{M}_4$. 又 $\Delta^0\Delta^2\mathscr{I}=\Delta_5\Delta_3\mathscr{I}=\Delta_3\mathscr{I}$，故 $\mathscr{I}$ 的 Boardman 符号为 $(2,0,0,\cdots)$.

定义 11.1.4 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽. f 的 Boardman 符号定义为理想 $I(f)$ 的 Boardman 符号,其中 ε_n 中的理想 $I(f)$ 由 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 生成.

命题 11.1.2 映射芽 $(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 的 Boardman 符号是一个接触等价不变量. 即若二映射芽是 $\mathscr{K}$-等价的,则它们具有相同的 Boardman 符号.

证 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为二 C^∞ 映射芽,$f=(f_1,\cdots,f_p)$,$g=(g_1,\cdots,g_p)$.

(i) 若 $f\underset{\mathscr{C}}{\sim}g$,据推论 8.4.1,$I(f)=I(g)$,因而由命题 11.1.1 可得到 f 和 g 有相同的 Boardman 符号.

(ii)若 $f\underset{\mathscr{R}}{\sim}g$,则存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 使得 $g=f\circ h$. 显然 h 的分量 $h_1,\cdots,h_n$ 可取做 $(\mathbb{R}^n,0)$ 的一个局部坐标系. 计算 $f_1,\cdots,f_p$ 关于 $h_1,\cdots,h_n$ 的 Jacobi 矩阵与计算 $g_1,\cdots,g_p$ 关于标准坐标系 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Jacobi 矩阵,易见将得到相同的 Jacobi 扩张(据命题 11.1.1),因而 f 与 g 具有相同的 Boardman 符号.

(iii) 设 $f\underset{\mathscr{K}}{\sim}g$,据命题 8.4.1,存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得 $f\circ h\underset{\mathscr{C}}{\sim}g$. 然后由(i)与(ii)可知,$f$ 与 g 必有相同的 Boardman 符号.

定义 11.1.5 设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为 C^∞ 映射芽,又 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 为一组非负整数. 如果 f 的 Boardman 符号为 $(i_1,\cdots,i_k,\cdots)$,则说 f 在点 0 具有 Σ^I 类奇点.

等价地,设 $f=(f_1,\cdots,f_p)$,$I(f)=\langle f_1,\cdots,f_p\rangle\varepsilon_n$. 若理想 $I(f)$ 的相继临界 Jacobi 扩张为

$$\Delta^{i_1}(I(f)),\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}(I(f)),\cdots,\Delta^{i_k}\Delta^{i_{k-1}}\cdots,\Delta^{i_1}(I(f)),$$

则 f 在点 O 具有 Σ^I 类奇点.

例 5 函数 $y=x^3$ 在点 O 的芽具有 $\Sigma^{1,1,0}$ 类奇点,$y=x^k$ 在点 O 的芽属于 $\Sigma^{\overbrace{1,\cdots,1}^{k-1},0}$ 类. 芽

$$f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x,y)\mapsto(x^2-y^2,xy)$$

和

$$g:(\mathbb{R}^4,0)\to(\mathbb{R}^4,0),(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(x_1,x_2,x_3^2,x_4^2)$$

均属于 $\Sigma^{2,0}$ 类.

定义 11.1.6 设 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$ 为 C^∞ 映射芽,它 $\mathscr{K}$-等价于 C^∞ 芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$. 定义 f 的 Boardman 符号为 f_0 的 Boardman 符号.

据命题 11.1.2,这一定义是合理的.

命题 11.1.3 设 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$ 为 C^∞ 映射芽,则 f 的 Boardman 符号中的前 k 个整数仅依赖于 f 的 k-导网.

证 可假设 $x=0,y=0$. 由 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 生成的理想记为 $\mathscr{I}$,并令 $(i_1,i_2,\cdots)$ 为 $\mathscr{I}$ 的 Boardman 符号. 对 k 使用归纳法,理想

$$\Delta^s\Delta^{i_{k-1}}\cdots\Delta^{i_1}\mathscr{I}$$

显然由 $f_1,\cdots,f_p$ 的阶数不大于 k 的偏导数所生成,并且这一理想是不是真理想仅依赖于所有这些偏导数在点 $O\in\mathbb{R}^n$ 的值,于是 i_k 仅依赖于 f 的 k-导网.

定义 11.1.7 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ 为一组非负整数. 如果 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,x)\to(\mathbb{R}^p,y)$ 的 Boardman 符号具有形式 $(i_1,\cdots,i_k,\cdots)$,则称 f 属于类 Σ^I.

在导网空间 $J^{k,0}_{n,p}$ 中定义的子集 Σ^I 由满足下列条件的 k-导网所组成,要求它们中的每一个有一个代表(为 C^∞ 映射芽)属于类 Σ^I.

依命题 11.1.3,子集 Σ^I 的定义是合理的.

例 6 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $(x,y)\mapsto(u,v)$,其中

$$u=x^2-y^2+2\varepsilon x,\ v=2xy-2\varepsilon y,\ \varepsilon>0,$$

计算 f 在任意点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 的芽的二阶 Boardman 符号 (i,j). 假定 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 与 f 在点 (x_0,y_0) 处的芽 $\mathscr{K}$-等价,依定

义，只需计算芽 f_0 的二阶 Boardman 符号(i,j). 现选取芽 f_0 如下：设$(x,y)\mapsto(u_0,v_0)$，其中

$$u_0(x,y)=u(x+x_0,y+y_0)-u(x_0,y_0)$$
$$=x^2-y^2+2(x_0+\varepsilon)x-2y_0y,$$
$$v_0(x,y)=v(x+x_0,y+y_0)-v(x_0,y_0)$$
$$=2xy+2y_0x+2(x_0-\varepsilon)y.$$

设 $\mathscr{I}=\langle u_0,v_0\rangle\varepsilon_2$，则 $\Delta^i\mathscr{I}$ 由 u_0,v_0 及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(x+x_0+\varepsilon) & -2(y+y_0)\\ 2(y+y_0) & 2(x+x_0-\varepsilon)\end{bmatrix}$$

的$(3-i)$阶子式所生成.

理想 $\Delta^2\mathscr{I}$不是真理想，因为它由 u_0,v_0 及上述矩阵的诸元素所生成，而生成元$\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$与$\dfrac{\partial v_0}{\partial y}$含有非零常数项.

理想 $\Delta^1\mathscr{I}$由 u_0,v_0 及 $D=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\end{bmatrix}=4[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2-\varepsilon^2]$生成. 当常数项 $x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2=0$ 时，$\Delta^1\mathscr{I}$是真理想因而是临界理想. 圆周 $x_0^2+y_0^2=\varepsilon^2$ 为 f 的一阶奇点集$\Sigma^1(f)$或者说 f 在该圆周上的每一点处的芽具有 Σ^1 类奇点.

理想 $\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}$由 u_0,v_0,D 以及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} & \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial v_0}{\partial x} & \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial D}{\partial x} & \dfrac{\partial D}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(x+x_0+\varepsilon) & -2(y+y_0)\\ 2(y+y_0) & 2(x+x_0-\varepsilon)\\ 8(x+x_0) & 8(y+y_0)\end{bmatrix}$$

的 2 阶子式所生成.稍做计算便知,这些生成元所含的常数项分别是

$$4(x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2),16y_0(2x_0+\varepsilon),16(y_0^2-x_0^2+x_0\varepsilon).$$

当

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2-\varepsilon^2=0, \\ y_0(2x_0+\varepsilon)=0, \\ y_0^2-x_0^2+x_0\varepsilon=0, \end{cases}$$

即 (x_0, y_0) 为 ε^3 的 3 个复立方根 $(\varepsilon, 0)$, $\left(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)$, $\left(-\frac{\varepsilon}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon\right)$时,$\Delta^1\Delta^1\mathscr{I}$为临界理想,因此 f 在这 3 个点处的芽具有 $\Sigma^{1,1}$类奇点. f 在圆周$\Sigma^1(f)$的其他点处的芽属于类 $\Sigma^{1,0}$. 此外,f 在除去圆周$\Sigma^1(f)$的平面上任意点的芽属于 Σ^0 类,因而是非奇异芽.

将奇点集 $\Sigma^1(f)$用参数方程表示为

$$x_0=\varepsilon\cos\theta,\quad y_0=\varepsilon\sin\theta,$$

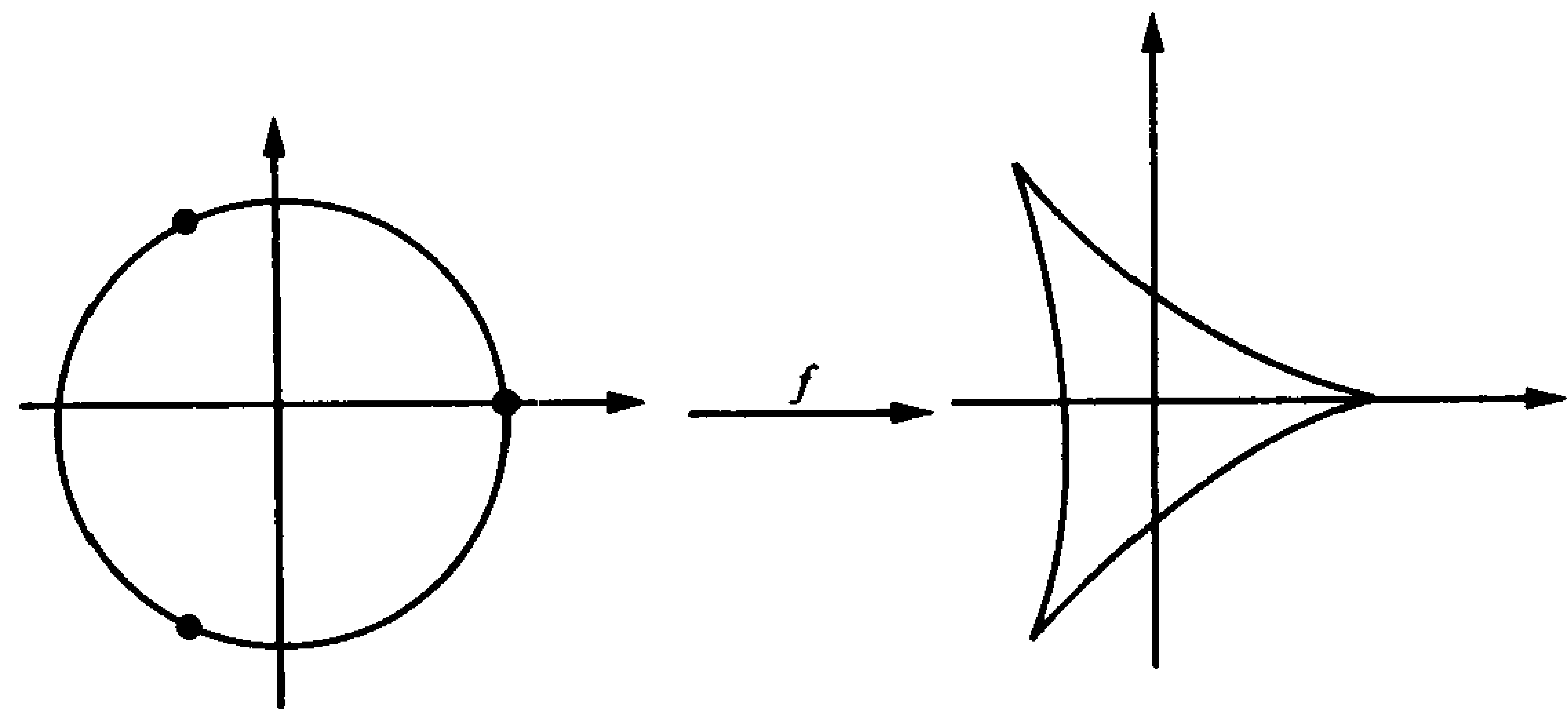


图 11.1

则分歧集 $f(\Sigma^1(f))$ 的参数方程为

$$u=\varepsilon^2(\cos2\theta+2\cos\theta),v=\varepsilon^2(\sin2\theta-2\sin\theta),$$

该曲线是三尖内摆线，可看作是一小圆在另一大圆（半径为小圆半径的 3 倍）内做无滑滚动，小圆上一定点的运动轨迹. 圆周 $x_0^2+y_0^2=\varepsilon^2$ 上的 3 个点（对应于 ε^3 的立方根）被 f 映为内摆线上的 3 个尖点，这一事实正好由上述二阶 Boardman 符号所反映. 它们是 $f|\Sigma^1(f)$ 的 Σ^1 点，而圆周上的其他点则为 $f|\Sigma^1(f)$ 的 Σ^0 点.

§11.2 Boardman 定理的陈述

引理 11.2.1 导网空间 $J_{n,p}^{k,0}$ 中的子集 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 为非空集当且仅当下列条件成立：

(i) $n\geqslant i_1\geqslant i_2\geqslant\cdots\geqslant i_k\geqslant0$,

(ii) $i_1\geqslant n-p$,

(iii) 若 $i_1=n-p$，则 $i_1=i_2=\cdots=i_k$.

证 只需考虑源与靶均为 0 的导网，先证必要性.

(i) 由定义直接得到 $n\geqslant i_1$ 且所有的 $i_1,\cdots,i_k\geqslant0$. 下证 $i_j\geqslant i_{j+1}$.

在 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$ 中取一个导网，将它的一个代表芽的分量所生成的理想记为 $\mathscr{I}(\subset\varepsilon_n)$. 假定

$$\Delta^{i_t}\cdots\Delta^{i_1}\mathscr{I}$$

由 $g_1,\cdots,g_{\sigma_t}$ 生成，其中 $\sigma_1\leqslant\sigma_2\leqslant\cdots$.

设 $\Delta^s\Delta^{i_j}\cdots\Delta^{i_1}\mathscr{I}$ 为 ε_n 中的真理想，则 $g_1,\cdots,g_{\sigma_j}$ 的 Jacobi 矩阵的所有 $(n-s+1)$ 阶子式不含非零常数项. 特别，$g_1,\cdots,g_{\sigma_{j-1}}$ 的 Jacobi 矩阵的所有 $(n-s+1)$ 阶子式所含的常数项为 0，因而 $\Delta^s\Delta^{i_{j-1}}\cdots\Delta^{i_1}\mathscr{I}$ 是真理想，于是 $s\leqslant i_j$. 取 $s=i_{j+1}$，则 $i_{j+1}\leqslant i_j$.

(ii) 在 $\Sigma^1(\subset J_{n,p}^{1,0})$ 中取一个导网，不妨设它的代表芽为

$f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,令 $\mathscr{I}=\langle f_1,\cdots,f_p\rangle\varepsilon_n$,其中 $f_1,\cdots,f_p$ 为 f 的分量.依定义,$\Delta^s\mathscr{I}$由 $\mathscr{I}$以及 $f_1,\cdots,f_p$ 的 Jacobi 矩阵的$(n-s+1)$阶子式所生成.

$\Delta^s\mathscr{I}$为真理想$\Leftrightarrow$D$f(0)$的所有$(n-s+1)$阶子式全为 0

$$\Leftrightarrow \mathrm{D}f(0)\text{ 的核的维数}\geqslant s,$$

从而

$$\Delta^s\mathscr{I}\text{为临界理想}\Leftrightarrow \dim\mathrm{Ker}\mathrm{D}f(0)=s,$$

这说明按 Boardman 定义的 Σ^{i_1} 和 §2.5 中 Σ^{i_1} 的定义相一致,从而 $i_1\geqslant n-p$.

(iii)若 $i_1=n-p$,则 $\Delta^{i_1}\mathscr{I}=\Delta_{p+1}\mathscr{I}=\mathscr{I}$,因而立即可推出 $i_1=i_2=\cdots=i_k$.

再证充分性.假定引理中条件(i)～(iii)被满足,构作一芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$带有分量 $f_1,\cdots,f_p$,使得 f 属于$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$类.下分两种情形:

1) $i_1=n-p$.取 $f_1=x_1,\cdots,f_p=x_p$.

2) $i_1>n-p$.令

$$\begin{cases} f_i=x_i, & 1\leqslant i\leqslant n-i_1,\\ f_{n-i_1+1}=\displaystyle\sum_{j=n-i_1+1}^{n-i_2}x_j^2+\sum_{j=n-i_2+1}^{n-i_3}x_j^3+\cdots,\\ f_i=0, & n-i_1+2\leqslant i\leqslant p,\end{cases}$$

则 f 具有$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$类奇点(留作练习).

本引理告诉我们,$J_{n,p}^{k,0}$可以分解为有限个形如$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$的非空子集的并.例如 $J_{2,2}^{2,0}$中的非空奇点集为 $\Sigma^{2,2},\Sigma^{2,1},\Sigma^{2,0},\Sigma^{1,1},\Sigma^{1,0}$ 和 Σ^0.

定理 11.2.1 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$满足引理 11.2.1 中条件(i)～(iii),则 $J_{n,p}^{k,0}$中的 k 阶奇点集Σ^I 是余维为 $\nu_I(n,p)$的微分子

流形,其中 $\nu_I(n,p)=(p-n+i_1)\mu(i_1,i_2,\cdots,i_k)-(i_1-i_2)\mu(i_2,\cdots,i_k)-\cdots-(i_{k-1}-i_k)\mu(i_k)$,并且 $\mu(i_1,i_2,\cdots,i_k)$表示满足下列条件的整数序列$(j_1,j_2,\cdots,j_k)$的总数:

(i) $j_1\geqslant j_2\geqslant\cdots\geqslant j_k\geqslant 0$,

(ii) 对于每一 $s(1\leqslant s\leqslant k)$,$i_s\geqslant j_s$ 且$j_1>0$.

Σ^I 叫做 $J^{k,0}_{n,p}$ 中的 Boardman 子流形,Mather 称它为 Thom-Boardman 奇点集.

例 1 对于 $k=1$,有 $\mu(i)=i$,于是 Σ^i 在$J^{1,0}_{n,p}$中的余维数 $\nu_i(n,p)=i(p-n+i)$,与§2.5 中的公式相同.

对于 $k=2$,设 $I=(i,j)$,则有 $\mu(i,j)=i(j+1)-\dfrac{j(j-1)}{2}$,因而 $\Sigma^{i,j}$在$J^{2,0}_{n,p}$中的余维数

$$\nu_{i,j}(n,p)=(p-n+i)i+\frac{j}{2}[(p-n+i)(2i-j+1)-2i+2j],$$

该公式曾由 Levine 获得.特别当 $n=p$ 时,

$$\nu_{i,j}(n,n)=i^2+\frac{j}{2}(2i^2-ij+2j-i).\qquad(1)$$

例 2 设 $I=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{k})$.显然有 $\mu(1,\cdots,1)=k$,因而 $\Sigma^{\overbrace{1,\cdots,1}^{k}}$(简记为 Σ^{1_k})在 $J^{k,0}_{n,p}$ 中的余维数为$(p-n+1)k$.特别当 $p=n$ 时,$\nu_I(n,n)=k$.

定义 11.2.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为 C^∞ 映射.如果 f 的k-导网映射

$$j^k_0 f:\mathbb{R}^n\to J^{k,0}_{n,p},$$

$x\mapsto j^k_0 f(x)=(f-f(x))$的 k 阶 Taylor 多项式横截于所有的 Boardman 子流形 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$,那么 f 叫做好映射.

根据定理 2.1.1,

$$(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^{i_1,\cdots,i_k})$$

是$\mathbb{R}^n$中的微分子流形，并且具有与$\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$相同的余维数.不仅如此，Boardman 还证明了

$$(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}) = \Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f),$$

它就是 Thom 的 k 阶奇点集，并且

$$\Sigma^{i_1,\cdots,i_{k-1},i_k}(f) = \Sigma^{i_k}(f\big|\Sigma^{i_1,\cdots,i_{k-1}}(f)).$$

现将上述结果概述为

定理 11.2.2 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为好映射，$I=(i_1,\cdots,i_k)$，则 $\Sigma^I(f)=(j_0^k f)^{-1}(\Sigma^I)$或为空集或为$\mathbb{R}^n$中的微分子流形，其余维数为 $\nu_I(n,p)$. 又 $x\in\Sigma^I(f)$当且仅当 f 在点 x 处的 k-导网 $j_0^k f(x)\in\Sigma^I$.

定理 11.2.3 设 $I=(i_1,\cdots,i_k)$为一组整数，合于引理 11.2.1 中条件(i)～(iii)，则集

$$\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j_0^k f \pitchfork \Sigma^I\}$$

为 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.

证 据定理 11.2.1 和定理 2.4.4 及其注.

本定理说每一个光滑映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 连同它的任意个数导数可用好映射来任意逼近.

现对好映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，考虑可能出现的 Thom 奇点集. 因 $\Sigma^i(f)$在$\mathbb{R}^n$中的余维数为 i^2，因此对于平面到平面的光滑映射，一般不会出现 Σ^2 类奇点. 当 $n\geqslant 4$ 时，好映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 可能有 Σ^2 类奇点.

而对于好映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，最先出现 $\Sigma^{i,j}$类奇点应要求 $\nu_{i,j}(n,n)=n$. 由计算余维数的 Levine 公式(1)，得到下表：

i,j	1,0	1,1	2,0	2,1	2,2	3,0	3,1	3,2	3,3	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
$\nu_{i,j}=n$	1	2	4	7	10	9	16	22	27	16	29	40	49	56

当 $n=p\leqslant 16$ 时，对于好映射来说下列类型的奇点必然出现：

$n=\nu_I$	n	4	7	9	10	13	15	16
I	1_n	2	2,1	3	2,2 $2,1_2$	$2,1_3$	2,2,1	3,1 4 $2,1_4$

其中 1_n 指的是$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n}$.

现在来看一个具体例子.

例 3 设 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 为好映射，可能出现的 Thom 奇点集只能是 $\Sigma^1(f)$. 它可分裂为 $\Sigma^{1,0}(f)$和 $\Sigma^{1,1}(f)$，其余维数分别为 1 和 2. 又 $\Sigma^{1,1}(f)$可分裂为 $\Sigma^{1,1,0}(f)$与 $\Sigma^{1,1,1}(f)$，余维数分别为 2 和 3. 不可能将 $\Sigma^{1,1,1}(f)$再分裂，因为 k 阶 Thom 奇点集 $\Sigma^{1_k}(f)$的余维数为 k(见例 2)，当 $k\geqslant 4$ 时便不再出现. 现在进一步讨论广义 Whitney 映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，定义为

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_2,$$

$$y_3 = x_3^4 + x_1x_3^2 + x_2x_3.$$

容易验证可能出现的 Thom 奇点集由下列方程给定：

$$\Sigma^1(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$\Sigma^{1,1}(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0 \text{ 与 } \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\Sigma^{1,1,1}(f):\frac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} = 0 \text{ 与 } \frac{\partial^3 y_3}{\partial x_3^3} = 0.$$

$\Sigma^1(f)$为折叠曲面，$\Sigma^{1,1}(f)$为折叠曲线，$\Sigma^{1,1,1}(f)$则为原点，见图 11.2 所示.

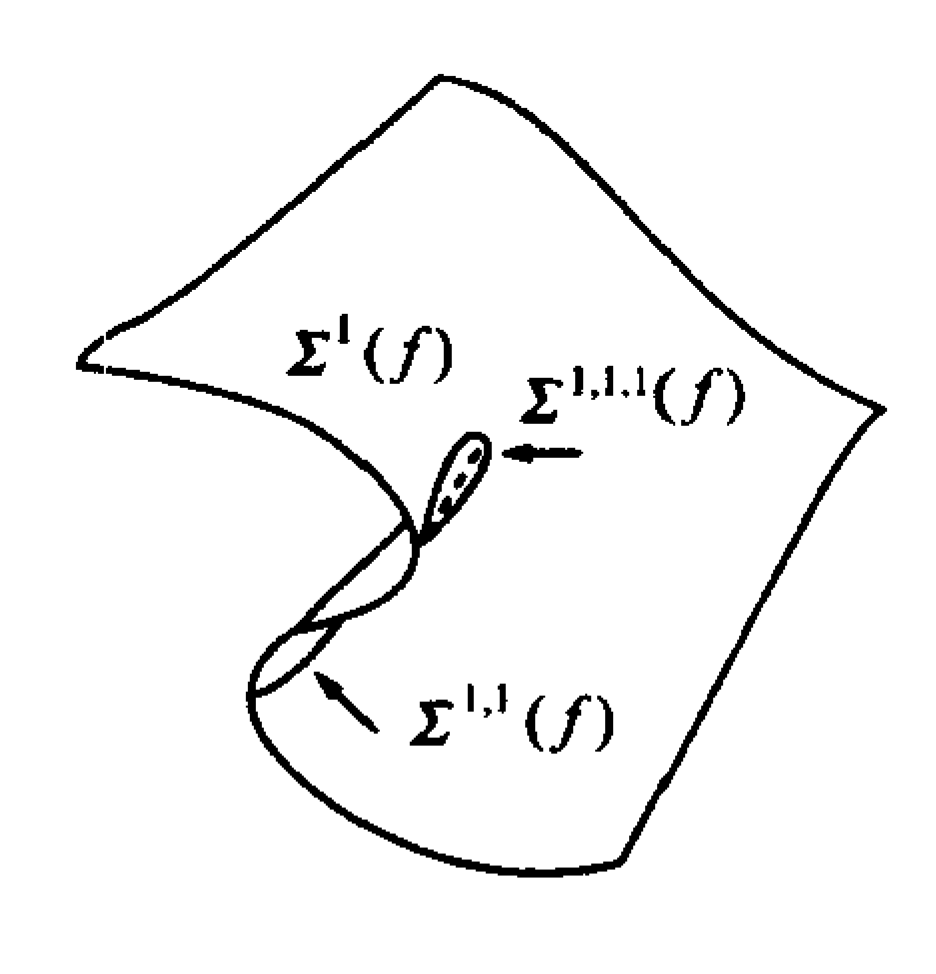


图 11.2

f 的临界值所成曲面叫做燕尾面，如图 11.3 所示. 这一燕尾面可表示为由形如 x^4+ax^2+bx+c 的多项式所组成的三维空间中的曲面 S，该曲面由点(a,b,c)组成，并且要求这些点对应于带有重根的多项式 x^4+ax^2+bx+c. 曲面 S 分多项式空间$\mathbb{R}^3$ 为 3 个区域：在其中一个具有棱锥形状的区域里，多项式有 4 个实根. 而在它下方的区域里只有 2 个实根. 在余下的区域中则无实根. 相应地，在由临界值所界定的区域中，Whitney 映射的原像数目分别为 4,2 和 0.

为了得到燕尾面的图形，我们用平面 $a=$ 常数来截割它，看看截线是什么曲线.

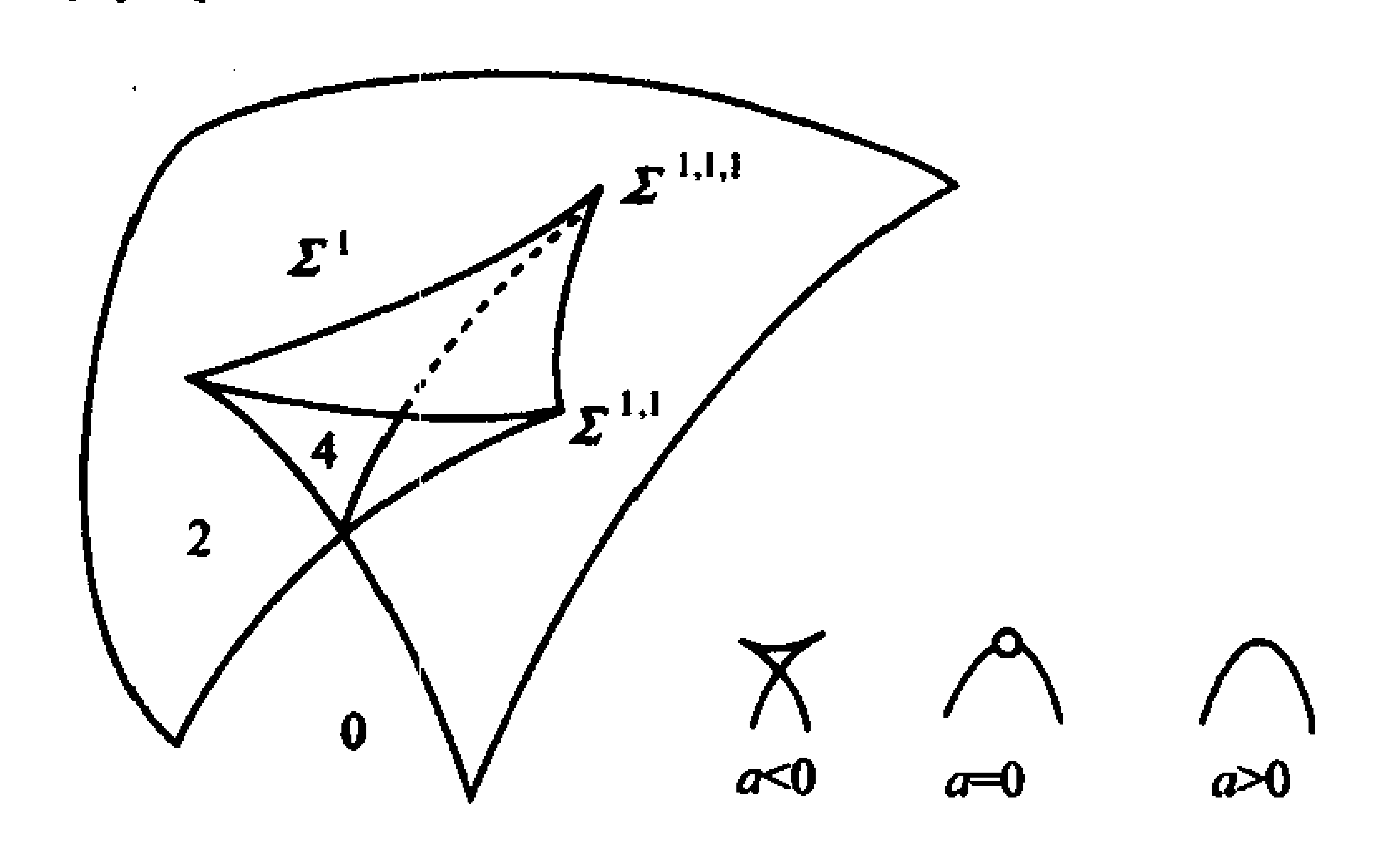


图 11.3

若 t 为多项式的重根，则 $c=-t^4-at^2-bt, b=-4t^3-2at$，于是得到截线的参数方程为

$$\begin{cases} c = 3t^4 + at^2 \\ b = -4t^3 - 2at, \end{cases}$$

当 $a=0$ 时，截线为 4/3 次"抛物线"，当 $a>0$ 时则为光滑曲线，而当 $a<0$ 时，它有两个半立方退化点(对应于 $\Sigma^{1,1}$ 类奇点)和一个自相交点.

每一个光滑映射 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 可以用只有 Whitney 奇点 Σ^1(折叠)和 $\Sigma^{1,1}$(尖点)及 $\Sigma^{1,1,1}$(燕尾)的 C^∞ 映射来逼近.

§11.3 Boardman 符号与开折

命题 11.1.2 告诉我们，Boardman 符号是一个接触等价不变量，即接触等价的二映射芽有相同的 Boardman 符号. 本节考虑一映射芽与它的开折的 Boardman 符号之间的关系.

命题 11.3.1 设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$是芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$的 r-参数开折，则 f 和 F 具有相同的 Boardman 符号.

证 设 $u_1,\cdots,u_r$ 与 $x_1,\cdots,x_n$ 分别为$\mathbb{R}^r$ 与$\mathbb{R}^n$ 的坐标系. 定义 $G:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$为 $G=1_{(\mathbb{R}^r,0)}\times f$，其中 $1_{(\mathbb{R}^r,0)}$ 为$(\mathbb{R}^r,0)$上的恒同映射芽. 说得详细些，芽 G 的分量为 $u_1,\cdots,u_r$, $f_1,\cdots,f_p$，其中 $f_1,\cdots,f_p$ 为 f 的分量. 显然 G 是 f 的常值开折. 我们首先证明

1) F 与 G 是 $\mathscr{C}$-等价的. 事实上，F 是 f 的 γ-参数开折，其分量为 $u_1,\cdots,u_r,F_1,\cdots,F_p$，并且

$$F_i(0,\cdots,0,x_1,\cdots,x_n) = f_i(x_1,\cdots,x_n), 1\leqslant i\leqslant p.$$

据定理 1.1.1,

$$F_i = f_i + \sum_{j=1}^{r} u_j h_j, \quad h_j \in \varepsilon_{r+n},$$

由此可知

$$\langle u_1, \cdots, u_r, F_1, \cdots, F_p \rangle \varepsilon_{r+n} = \langle u_1, \cdots, u_r, f_1, \cdots, f_p \rangle \varepsilon_{r+n},$$

即 $I(F) = I(G)$,据推论8.4.1,$F \underset{\mathscr{C}}{\sim} G$. 依命题11.1.2,$F$ 与G 具有相同的 Boardman 符号. 其次证明

2) G 与f 具有相同的 Boardman 符号. 设 f 的 Boardman 符号为$(i_1, i_2, \cdots)$. 断言:

(*) 理想 $\Delta^s \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$是由 $u_1, \cdots, u_r$ 和$\Delta^s \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$生成.

为方便起见,这里令 $i_0 = 0$. 由此立即可推出 $\Delta^{i_k} \Delta^{i_{k-1}} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$为临界理想,并且 G 与 f 具有相同的 Boardman 符号. 下证断言(*).

显然当 $k = 0$ 时结论真. 假定对 k,(*)成立. 选取理想 $\Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$的一组生成元,将这组生成元关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的 Jacobi 矩阵记为 J. 添加 $u_1, \cdots, u_r$ 于取定的这组生成元,将它们关于 $u_1, \cdots, u_r, x_1, \cdots, x_n$ 的 Jacobi 矩阵记为 J^1. 考虑理想 $\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$,它由 $u_1, \cdots, u_r, \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$的生成元以及 J^1 的$(r + n - s + 1)$阶子式所生成. 由于 J^1 是 r 阶单位矩阵与J 的直和,因而由 J^1 的$(r + n - s + 1)$阶子式生成的理想和 J 的$(n - s + 1)$阶子式生成的理想相同. 于是 $\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(G))$由 $u_1, \cdots, u_r$, $\Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$的生成元以及 J 的$(n - s + 1)$阶子式所生成,即它由 $u_1, \cdots, u_r$ 及$\Delta^s \Delta^{i_k} \cdots \Delta^{i_0}(I(f))$所生成.

由 1)和 2),本命题得证.

在本命题意义下,Boardman 符号对映射芽的开折而言是一个不变量.

例 1 设有两个好映射 $F_{\pm}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,定义为

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ y_4 = x_3x_4, \end{cases}$$

它们在点 $0\in\mathbb{R}^4$ 处的芽属于 $\Sigma^{2,0}$类,因为芽 $F_{\pm}:(\mathbb{R}^4,0)\to(\mathbb{R}^4,0)$ 是芽 $f_{\pm}:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0),(x_3,x_4)\mapsto(x_3^2\pm x_4^2,x_3x_4)$的 2-参数开折,且 $f_{\pm}$ 具有 $\Sigma^{2,0}$类奇点(参看§11.1 中例 2).但是芽 F_+ 和 F_- 不是 $\mathscr{A}$-等价的,这说明仅用类 Σ^I 来区分奇点是不够的.

例 2 设芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$带有分量 $F_1,\cdots,F_n$,其中

$$F_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$F_n = x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^i,$$

它是函数芽 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0),x_n\mapsto f(x_n)=x_n^{n+1}$ 的$(n-1)$-参数开折,且芽 f 属于 $\Sigma^{1_n,0}$类,因而 $0\in\Sigma^{1_n,0}(F)$.映射芽 F 叫做广义 Whitney 映射芽.

回忆定理 9.3.1,Morin 的一个结果[58]可陈述为

定理 11.3.1 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为好映射,则下列断语是等价的:

(i) $x\in\Sigma^{1_n,0}(f)$,

(ii) f 在点 x 处的芽 $\mathscr{A}$-等价于广义 Whitney 映射在点 0 处的芽:

$$y_i = x_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$y_n = x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^i.$$

证明留作练习

定理 11.3.1 说明对于属于类 $\Sigma^{1_n,0}$ 的好映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$,可以用

类 $\Sigma^{1_n,0}$来完全刻画(仅相差 $\mathscr{A}$-等价). 上节中例 3 给出了它的一个特殊情形.

§11.4 应用:映射芽 $\mathscr{K}$-等价的判别

我们知道命题 8.4.1 及推论 8.4.1 提供了代数判别法用以判断二光滑映射芽是否接触等价,本节的讨论说明使用映射芽的 Boardman 符号也是有效的.

命题 11.4.1 设 C^∞ 芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$具有有限 $\mathscr{K}$-余维,则它的 Boardman 符号必具有形式$(i_1,\cdots,i_k,0,0,\cdots)$,其中 k 为某一正整数.

证 由假设,f 必为有限 $\mathscr{K}$-决定的映射芽,因而 $\mathscr{K}$-等价于这样一个多项式映射芽 $g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,它的每一分量为次数不大于 k 的多项式,这里 k 为某一正整数. 显然,g 的 Boardman 符号具有所要求的形式$(i_1,\cdots,i_k,0,\cdots,0)$. 又因为 Boardman 符号在接触等价下保持不变,故 f 具有与 g 相同的 Boardman 符号. 证毕.

命题 11.4.2 设 C^∞ 映射芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$属于 Σ^{n-r} 类,$0<r<\min(n,p)$,则存在 $\mathscr{A}$-等价于 G 的 C^∞ 映射芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,使得 F 是某一秩为 0 的芽 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{p-r},0)$ 的 r-参数开折.

证 由假设知 G 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 r,即 G 在点 0 的 Jacobi 矩阵

$$\mathrm{D}G(0)=\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(0)\right)$$

的秩为 r. 通过对矩阵施行初等变换,这相当于在 G 的源空间与靶空间进行非退化线性坐标变换,使得上述矩阵的左上角 $r\times r$ 子矩阵满秩. 把相应于上述坐标变换后的 G 的前 r 个分量仍记为 $G_1,\cdots,G_r$. 令 $g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$为

$$g(x)=(G_1(x),\cdots,G_r(x)),$$

显然 g 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 r,因而是淹没芽. 根据秩定理,存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$,使得 $g\circ h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$ 为投影 $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_n)$. 然后令 $F=G\circ h$. 显然 F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的,并且 F 可写为

$$F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{p-r},0),$$

$$(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,f_{r+1}(x_1,\cdots,x_n),\cdots,$$

$$f_p(x_1,\cdots,x_n)).$$

令 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{n-p},0)$ 为 F 在 $\{0\}\times\mathbb{R}^{n-r}$ 上的限制, $f_0(x_{r+1},\cdots,x_n)=(f_{r+1}(0,\cdots,0,x_{r+1},\cdots,x_n),\cdots,f_p(0,\cdots,0,x_{r+1},\cdots,x_n))$,则 F 是 f_0 的 r-参数开折,且 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^{n-r}$ 的秩为 0. 证毕.

以下假定映射芽 $(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 具有有限 $\mathscr{K}$-余维. 我们将对几种简单情形进行讨论. 首先考虑 $n=1,p\geqslant2$,此时它的一阶 Boardman 符号为 Σ^0 或 Σ^1. 对于前者,芽是非奇异的并且是浸入芽,其标准形为 $x\mapsto(x,\underbrace{0,\cdots,0}_{p-1})$. 现假定芽属于 Σ^1 类.

命题 11.4.3 设芽 $f:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 属 Σ^1 类且具有有限 $\mathscr{K}$-余维,则 f 必为 $\Sigma^{1_k,0}$ 类奇点(k 为某一正整数),并且 $\mathscr{K}$-等价于芽 $(0,\cdots,0,x^{k+1})$.

证 据命题 11.4.1 和引理 11.2.1, f 具有所述的奇点类型. 将 f 的分量 $f_1,\cdots,f_p$ 所生成的理想记为 $I(f)$. 对 k 使用归纳法,容易验证 $\underbrace{\Delta^1,\cdots,\Delta^1}_{k\text{个}}I(f)$ 由 $I(f)$ 及诸导数 $\dfrac{d^jf_i}{\partial x^j}$ 所生成,这里 $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant k$. 由此立即推出 f 属于 $\Sigma^{1_k,0}$ 类当且仅当

1) $\dfrac{\partial^jf_1}{\partial x^j}(0)=0,\cdots,\dfrac{\partial^jf_p}{\partial x^j}(0)=0,\quad j\leqslant k,$

2) 对某一 i, $\dfrac{\partial^{k+1}f_i}{\partial x^{k+1}}(0)\neq0.$

而条件 1)和 2)等价于 $I(f)=\langle x^{k+1}\rangle$. 此外,由 $g(x)=(0,\cdots,0,x^{k+1})$定义的 $g:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$也有 $I(g)=\langle x^{k+1}\rangle$. 据推论 8.4.1,$f$ 与 g 是 $\mathscr{C}$-等价的. 证毕.

现假定 n 和 p 均不小于 2,那么最简单情形是考察映射芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$,此时可能出现的一阶 Boardman 符号是 Σ^0 和 Σ^1 及 Σ^2. 在第一种情形下,芽是非奇异的. 对于 Σ^1 类的芽,有下列结果.

命题 11.4.4 设芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$属于 Σ^1 类并具有有限 $\mathscr{K}$-余维,则 f 必为$\Sigma^{1_k,0}$类奇点(k 为某一正整数),并且 $\mathscr{K}$-等价于芽(x,y^{k+1}).

证 同上一命题的证明,f 具有所述的奇点类型. 据命题 11.4.2,f $\mathscr{A}$-等价于芽 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$的 1-参数开折 g,并且 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}$ 的秩为 0,而命题 11.3.1 说明 f_0 与 g,因而 f_0 与 f 具有相同的 Boardman 符号,因此 f_0 为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点. 此外不难验证 $f_0(y)$ $\mathscr{K}$-等价于 y^{k+1},又 f 显然 $\mathscr{K}$-等价于$(x,f_0(y))$,于是 $\mathscr{K}$-等价于(x,y^{k+1}). 证毕.

接下来考虑属于 Σ^2 类的芽$(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$,可能的二阶 Boardman 符号为 $\Sigma^{2,0}$ 和 $\Sigma^{2,1}$ 及 $\Sigma^{2,2}$,这里只介绍 Mather 关于 $\Sigma^{2,0}$类奇点的完美结果.

定理 11.4.1 设芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$属于 $\Sigma^{2,0}$类,并且它的 $\mathscr{K}$-余维数有限,则它 $\mathscr{K}$-等价于下列芽之一:

$\mathrm{I}_{a,b}:(xy,x^a+y^b),b\geqslant a\geqslant 2,$

$\mathrm{II}_{a,b}:(xy,x^a-y^b),b\geqslant a\geqslant 2$ 且 a,b 为偶数,

$\mathrm{IV}_a:(x^2+y^2,x^a),a\geqslant 3.$

注 我们采用了 Mather 的记号 $I_{a,b}$和$\mathrm{II}_{a,b}$及IV_a. 由于他是在更一般的情形下进行讨论,因而在他所列的一览表中还包含了另外的芽,记之为$\mathrm{III}_{a,b}$和V_a.

证 因 f 属于$\Sigma^{2,0}$类,f 的分量不含线性项,因此 f 的 2-导网

由一对二元二次型

$$(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2, a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2)$$

组成.在源平面与靶平面上实施线性坐标变换,可以假定 f 的 2-导网具有下表所列的标准形之一

标准形	$(xy,x^2\pm y^2)$	(xy,x^2)	$(xy,0)$	$(x^2+y^2,0)$	$(x^2,0)$	$(0,0)$
Boardman 符号	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,0}$	$\Sigma^{2,1}$	$\Sigma^{2,2}$

而 Boardman 符号是 $\mathscr{K}$-不变量,故可以除去表中最后两个标准形,因 f 的第一个分量取 2-导网或为 xy 或为 x^2+y^2,现分别讨论如下:

(i) xy 情形. f 的第一个分量是余秩为 0 的光滑函数芽$(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R},0)$. 由 Morse 引理,这一函数芽 $\mathscr{R}$-等价于 xy. 应用相同的坐标变换于 f,易见 f $\mathscr{K}$-等价于芽$(xy,\zeta(x,y))$,其中 ζ 不含线性项. 据假设 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维,因而是有限 $\mathscr{K}$-决定的,所以可假定 $\zeta(x,y)$是多项式. 由推论 8.4.1 知,$(xy,\zeta(x,y))$和$(xy,\zeta(x,y)-\xi\cdot xy)$是 $\mathscr{C}$-等价的,其中 ξ 为多项式,因此可假定芽具有下列形式:

$$(xy,\alpha(x)+\beta(y)),\tag{1}$$

其中 α,β 为多项式。

假设 $\alpha\neq0$ 含最低次 $a\geqslant2$(即 x^a 是α 中的最低次幂),那么构作坐标变换 $x\mapsto X$,使得 α 变为 $\pm x^a$. 类似地,若 $\beta\neq0$ 含最低次 $b\geqslant2$,则可找到坐标变换$y\mapsto Y$将 β 变为 $\pm y^b$. 注意 x 和 X 生成 ε_1 中相同理想,y 和 Y 也生成 ε_1 中相同理想. 现考虑 α 与 β 的各种可能情形.

i) α,β 同时为 0. 此时(1)式为芽$(xy,0)$,它的 $\mathscr{K}$-余维数非有限,故删去.

ii) α,β 中只有 1 个为 0. 不妨设 $\alpha\neq0$. 坐标变换 $x\mapsto X$,

$y\mapsto y$使得芽(1)变为$(Xy,\pm x^a)$.因为Xy和xy生成相同理想,由推论8.4.1,$(Xy,\pm x^a)$和(xy,x^a)是$\mathscr{C}$-等价的,但是芽(xy,x^a)的$\mathscr{K}$-余维数也不是有限的,因此这一情形可排除掉.

iii) α,β两者均不为0.做坐标变换$x\mapsto X,y\mapsto Y$将(1)式变为$(XY,\pm x^a\pm y^b)$.因xy,XY生成相同理想,据推论8.4.1,$(XY,\pm x^a\pm y^b)$与$(xy,\pm x^a\pm y^b)$是$\mathscr{K}$-等价的.不妨假定$a\leqslant b$,并且还可用-1乘任意一个分量.此外,若a为奇数,做坐标变换$x\mapsto -x,,y\mapsto y$可改变x^a的系数符号.类似地,若b为奇数,也可通过坐标变换改变y^b的系数符号.于是除了x^a和y^b的系数符号相异并且a,b两者均为偶数的情形外,得到一个$\mathrm{I}_{a,b}$型的映射芽,否则便得到$\mathrm{II}_{a,b}$型的映射芽.

(ii) x^2+y^2情形　基于和情形(i)相同的理由,f可$\mathscr{K}$-等价于芽$(x^2+y^2,\zeta(x,y))$,其中ζ为多项式且不含次数不大于2的项.由推论8.4.1,$(x^2+y^2,\zeta(x,y))$与$(x^2+y^2,\zeta(x,y)-\xi\cdot(x^2+y^2))$是$\mathscr{C}$-等价的,其中$\xi$为多项式.特别选取$\xi$,使得$\zeta(x,y)-\xi\cdot(x^2+y^2)$不含带有因式$y^2$的项,于是可假定$f$具有下列形式:

$$(x^2+y^2,\alpha(x)+y\cdot\beta(x)),\tag{2}$$

其中α,β为多项式.注意(2)式中的第二个分量不能恒为0,因$(x^2+y^2,0)$的$\mathscr{K}$-余维数为无穷.用$a(\geqslant 3)$表$\alpha(x)+y\cdot\beta(x)$中的最低次数,因而最低次项为px^a+qyx^{a-1},其中p,q中至少有一个不为0.可以假定$p\neq 0,q=0$,为此考虑线性坐标变换

$$\begin{cases}X=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ Y=-x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}$$

显然$x^2+y^2=X^2+Y^2$.利用

$$Y^{2j}\equiv(-1)^jX^{2j}\bmod X^2+Y^2,$$

直接计算可得到

$$px^a + q \cdot yx^{a-1} \equiv PX^a + QYX^{a-1} \bmod X^2 + Y^2,$$

其中

$$\begin{cases} P = p\cos a\theta + q\sin a\theta, \\ Q = -p\sin a\theta + q\cos a\theta. \end{cases}$$

选取 θ,使得 $P \neq 0, Q = 0$,于是芽(2)$\mathscr{K}$-等价于$(x^2 + y^2, x^a)$,而这正是所要求的IV_a 型标准形.

第十二章　稳定映射芽的分类

Whitney 曾经证明：$\mathbb{R}^n$ 中的任意闭子集都可以是某个 C^∞ 函数$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的零点集．而将$\mathbb{R}^n$ 映入$\mathbb{R}^p$ 的 C^∞ 映射如果等价，必然具有微分同胚的奇点集，依上述 Whitnty 定理可以推出$\mathbb{R}^n$ 中的任意闭子集可以是某个 C^∞ 映射的奇点集，因此 C^∞ 映射的分类比起$\mathbb{R}^n$ 的所有闭集的分类还要广泛．显然这样的分类难以解决．事实上，人们并不是对所有映射都有兴趣，重要的是稳定的映射及稳定的映射芽．本章着重讨论稳定映射芽．§12.1 刻画稳定映射芽的代数及几何特征，§12.2 陈述了稳定芽的基本分类定理，证明放在§12.3．该定理告诉我们，稳定芽按 $\mathscr{A}$-等价分类可归结为按 $\mathscr{K}$-等价分类．而稳定芽的基本代数分类定理则指出还可以用某种实代数来进行分类．应用稳定芽分类的基本理论以及映射芽的 Boardman 符号，在§12.4 中给出了稳定芽分类的几个具体例子．最后一节介绍稳定映射，具体讨论了某些稳定映射可能出现的各种奇点类型．

§12.1　稳定映射芽的特征

我们知道 C^∞ 映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$是稳定的当且仅当它是无穷小稳定的，即

$$T_e\mathscr{A}(f)=\varepsilon(n,p),$$

其中 $T_e\mathscr{A}(f)$表示 $\varepsilon(n,p)$在群 $\mathscr{A}$ 作用下于 f 处的切空间．本节将介绍一些有效的方法来检验这一条件，描述稳定映射芽的特征．

12.1.1　稳定映射芽的秩

命题 12.1.1　设稳定映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$在点 $0\in\mathbb{R}^n$

的秩为 r,则映射 $j_0^1 f:(\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{1,0}, x\mapsto j_0^1 f(x)=\mathrm{D}f(x)$在点 0 横截于子流形 $\Sigma^{n-r}\subset J_{n,p}^{1,0}$.

证明留作练习.

推论 12.1.1 设 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$为稳定芽,其秩为 r,则

$$(n-r)(p-r)\leqslant n. \tag{1}$$

证 由命题 12.1.1,$\mathrm{Codim}\Sigma^{n-r}\leqslant n$,即$(n-r)\cdot(p-r)\leqslant n$.

例 1 若稳定芽 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$的秩 $r=0$,则由不等式(1)知,$p=1$.此时 f 必为 Morse 芽(见 §2.5).

例 2 不等式(1)对稳定芽 f 的秩 r 给出了较强的限制,例如

1) 若 $n=p=2$,则 $r\geqslant 1$.

2) 若 $n=p=3$ 或 $n=p=4$,则 $r\geqslant 2$.

3) 若 $n=2, p=3$,则 $r\geqslant 1$.

命题 11.4.2 告诉我们,秩为 r 的映射芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 可看作是秩为 0 的映射芽 $f_0:(\mathbb{R}^{n-r},0)\to(\mathbb{R}^{p-r},0)$的 r-参数开折(严格地说,相差一 $\mathscr{A}$-等价),因此自然考虑下面的问题:F 的稳定性能否用f_0 以及 F 的初始速度所具有的性质来予以描述呢?

12.1.2 稳定映射芽的判别

定理 12.1.1 设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,f(u,x))$是芽

$$f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),\ f_0(x)=f(0,x)$$

的 r-参数开折,则 F 为稳定芽当且仅当

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\varepsilon_p\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon(n,p), \tag{2}$$

这里 $\dot{F}_i(x)=\dfrac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)$表 F 的初始速度($i=1,\cdots,r$).

证 我们知道 F 的稳定性等价于它的无穷小稳定性,即

$$T_e\mathscr{A}(F)=(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}, \tag{3}$$

其中 $\varepsilon_{u,x}$(及 $\varepsilon_{u,y}$)表示$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$(及$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$)上的函数芽

环.

将$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$上的向量场芽 $\bar{X}$ 记为

$$\bar{X}=\begin{bmatrix}\xi\\X\end{bmatrix},$$

其中 ξ 为$\bar{X}$ 在参数空间$\mathbb{R}^r$ 中的分量,X 为$\bar{X}$ 在$\mathbb{R}^n$ 中的分量.类似地,$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$上的向量场芽 $\bar{Y}$ 写为

$$\bar{Y}=\begin{bmatrix}\eta\\Y\end{bmatrix},$$

其中 η 和 Y 分别为$\bar{Y}$ 在$\mathbb{R}^r$ 和$\mathbb{R}^p$ 中的分量.

条件(3)意指对任意 $\bar{Z}=\begin{bmatrix}\zeta\\Z\end{bmatrix}\in(\varepsilon_{u,x})^{\times(r+p)}$,其中 ζ、Z 分别为$\bar{Z}$ 在$\mathbb{R}^r$ 和$\mathbb{R}^p$ 中的分量,下列方程

$$\mathrm{D}F\cdot\hat{\bar{X}}+\bar{Y}\circ F=\bar{Z}\tag{4}$$

有解 $\bar{X}$ 和$\bar{Y}$,该方程可写成下列形式:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}&I&&&0&\\\hdashline\dfrac{\partial f}{\partial u_1}&\cdots&\dfrac{\partial f}{\partial u_r}&\dfrac{\partial f}{\partial x_1}&\cdots&\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}\xi\\X\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta\circ F\\Y\circ F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\zeta\\Z\end{bmatrix},$$

或

$$\begin{cases}\xi+\eta\circ F=\zeta,\\\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\xi_i\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\xi=\zeta-\eta\circ F,\\\displaystyle-\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\cdot\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z-\sum_{i=1}^{r}\zeta_i\frac{\partial f}{\partial u_i},\end{cases}$$

其中 $\zeta=(\zeta_1,\cdots,\zeta_r)\in(\varepsilon_{u,x})^{\times r}$, $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_r)\in(\varepsilon_{u,y})^{\times r}$, $X=(X_1,\cdots,X_n)\in(\varepsilon_{u,x})^{\times n}$.

由上可见,方程(4)对任意 $\bar{Z}$ 有解 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 当且仅当下列方程

$$-\sum_{i=1}^{r}(\eta_i\circ F)\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F=Z \tag{5}$$

对任意 $Z\in(\varepsilon_{u,x})^{\times p}$ 有解 (X,Y,η). 而集

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial f}{\partial x_j}+Y\circ F \mid X_j\in\varepsilon_{u,x},Y\in(\varepsilon_{u,y})^{\times p}\right\}=\widetilde{T_e}\mathscr{A}(F)$$

(参看 §9.2),于是条件(5)指的是商

$$M=(\varepsilon_{u,x})^{\times p}\Big/\widetilde{T_e}\mathscr{A}(F)$$

作为 $\varepsilon_{u,y}$-模是有限生成的,生成元为 $\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}$. 利用定理 5.3.3,它等价于

$$M_0=M\Big/\mathscr{M}_u\cdot M\cong(\varepsilon_x)^{\times p}\Big/T_e\mathscr{A}(f_0)$$

作为 ε_y-模是有限生成的,生成元为 $\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,x)=\dot{F}_i(x)(i=1,\cdots,r)$,而这恰好是条件(2).

注 依定义 8.2.7,条件(2)说明 $f_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$ 是一个有限奇点型的映射芽.

例 3 设 $f_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$ 具有有限 $\mathscr{A}$-余维. 据 $\mathscr{A}$-通用开折定理 9.1.1, f_0 有 $\mathscr{A}$-通用开折 F, 设 F 带有 r 个参数,于是有

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon(n,p).$$

据定理 12.1.1, F 是稳定芽. 这说明 f_0 的每一个 $\mathscr{A}$-通用开折均为稳定映射芽.

例 4 设 $f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^2,0)$, $x\mapsto(x^2,0)$, 它是 §8.3 中例

1. 我们已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\varepsilon_2\cdot h=\varepsilon(1,2),\qquad h=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},$$

它说明 f_0 是 FST. 据定理 12.1.1, f_0 的 1-参数开折

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,0),(u,x)\mapsto(u,x^2,ux)$$

是一个稳定芽,称为"Whitney 伞".

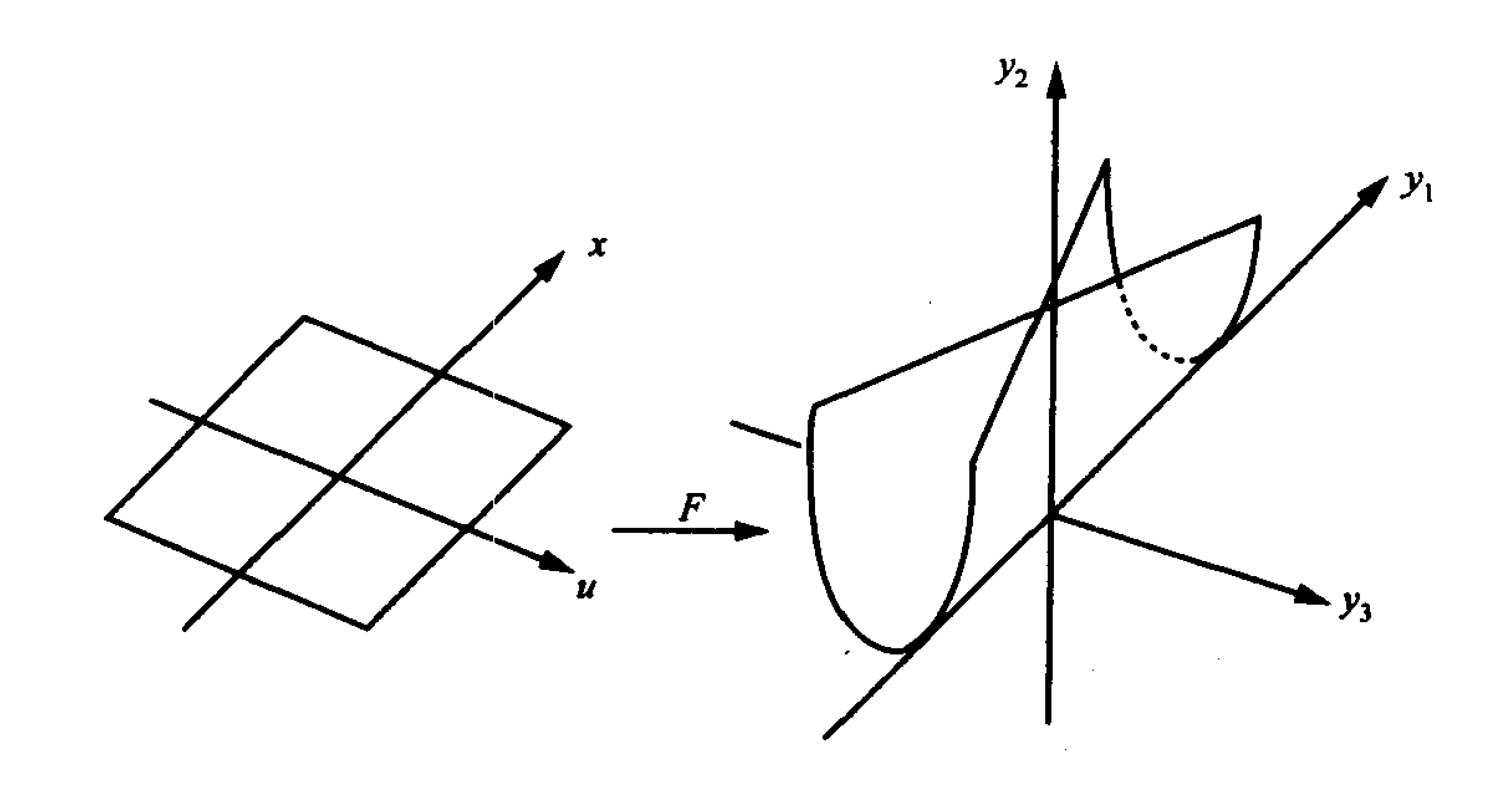


图 12.1

例 5 设 $f_0:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 定义为 $f_0(x,y)=(x^2,y^2)$,这是§8.3 中例 3,已证明

$$T_e\mathscr{A}(f_0)+\varepsilon_2\{h_1,h_2\}=\varepsilon(2,2),$$

其中 $h_1=\begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix},h_2=\begin{bmatrix}y\\0\end{bmatrix}$. 据定理 12.1.1, f_0 的 2-参数开折

$$F:(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2,0),$$

$$(u,v,x,y)\mapsto(u,v,x^2+uy,y^2+vx)$$

是稳定芽.

定理 12.1.2 设 $F(u,x)=(u,f(u,x))$是 $f_0(x)\in\varepsilon^\circ(n,p)$的 r-参数开折,又 f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 0 并且 $\dot{F}_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$,则下列条件是等价的:

(i) F 是稳定芽,

(ii) $T_e\mathcal{K}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^\circ(n,p)$,

(iii) $T_e\mathcal{K}(f_0)+\mathcal{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^\circ(n,p)$.

证 (i)⇔(ii) 据定理 12.1.1 和定理 10.6.1(i)⇔(ii),细节留给读者补述.

(ii)⇒(iii) 显然.

(iii)⇒(ii) 考虑 ε_n-模的下降序列

$$\varepsilon^\circ(n,p)\underset{c_1}{\supset}\mathcal{M}_n\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0)\underset{c_2}{\supset}\cdots$$
$$\underset{c_{r+1}}{\supset}\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0)$$

其中 c_{i+1} 表示 $\mathcal{M}_n^{i+1}\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0)$在 $\mathcal{M}_n^i\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0)$中的余维数($i=0,1,\cdots,r$).

a) $c_i=0$,据 Nakayama 引理,有 $T_e\mathcal{K}(f_0)\supset\mathcal{M}_n^{i-1}.\varepsilon^\circ(n,p)$,因而 $c_{i+1}=c_{i+2}=\cdots=0$.

b) $\mathrm{Codim}(\mathcal{M}_n^i\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0))=c_1+\cdots+c_i$.

现在依条件(iii)可推得 $\mathcal{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon^\circ(n,p)+T_e\mathcal{K}(f_0)$具有余维数不大于 r,所以按照 b)应有 $c_1+\cdots+c_{r+1}\leqslant r$.再根据 a)必有 $c_{r+1}=0$,于是 $T_e\mathcal{K}(f_0)\supset\mathcal{M}_n^r\cdot\varepsilon^\circ(n,p)$,并且(iii)⇒(ii).

由上述定理中(iii)容易得到下面的

推论 12.1.2 设稳定芽 F 在点 $0\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的秩为 r,则满足 $j^{r+2}G=j^{r+2}F$ 的每一芽 G 都是稳定的.

证明留作练习.

12.1.3 稳定映射芽的几何特征

设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,f_u(x)=f(u,x))$是芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开

折，f_0 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的秩为 0，又 $\dot{F}_i(0)=0(i=1,\cdots,r)$.

对任意正整数 s，定义 $j_0^s f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{s,0}$ 为

$$j_0^s f(u,x) = (f_u - f_u(x)) \text{ 的 } s \text{ 阶 Taylor 多项式}.$$

定理 12.1.3 设 F,f_0 如上所述，则 F 是稳定芽当且仅当 $j_0^{r+1}f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{r+1,0}$ 在 $\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的原点横截于接触轨道 $\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0\subset J_{n,p}^{r+1,0}$.

证 据定理 12.1.2，F 是稳定芽当且仅当

$$T\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)=\varepsilon^\circ(n,p). \tag{6}$$

$j_0^{r+1}f:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to J_{n,p}^{r+1,0}$ 在点 $(0,0)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 横截于 $\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0$ 是指

$$\mathrm{D}j_0^{r+1}f(0,0)(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n)+T_{j^{r+1}f_0}(\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=J_{n,p}^{r+1,0}, \tag{7}$$

而

$$\mathrm{D}j_0^{r+1}f(0,0)(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}\left\{\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_r},\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_n}\right\},$$

其中括号内的所有导数均在点 $(0,0)\in\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 取值. 注意到

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial u_i}(0,0)=j^{r+1}\dot{F}_i,\quad i=1,\cdots,r,$$

$$\frac{\partial j_0^{r+1}f}{\partial x_j}(0,0)=j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_j},\quad j=1,\cdots,n,$$

又据命题 8.4.4，

$$T_{j^{r+1}f_0}(\mathscr{K}^{r+1}\cdot j^{r+1}f_0)=j^{r+1}(T\mathscr{K}(f_0)),$$

所以条件(7)等价于

$$j^{r+1}(T\mathscr{K}(f_0))+\mathbb{R}\left\{j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,j^{r+1}\frac{\partial f_0}{\partial x_n},j^{r+1}\dot{F}_1,\cdots,j^{r+1}\dot{F}_r\right\}=J^{r+1,0}_{n,p}. \tag{8}$$

在(6)式两边取$(r+1)$-导网得(8)式. 又(8)式可写为

$$j^{r+1}\left(T\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}\right)=j^{r+1}(\varepsilon^\circ(n,p))$$

故由(8)式可得到(6)式,从而(6)⇔(7).

§12.2 稳定芽的基本分类定理

设$F,G:(\mathbb{R}^{r+n},0)\to(\mathbb{R}^{r+p},0)$是两个稳定芽,如果它们在原点的秩不相等,显然不可能$\mathscr{A}$-等价,因此利用秩可以区分稳定芽. 以下假定稳定芽$F,G\in\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$在原点具有相同的秩$r\geqslant 0$. 问:在什么条件下,$F$与$G$是$\mathscr{A}$-等价呢? 为寻求有效的判别法,首先将$F$和$G$看成是$\varepsilon^\circ(n,p)$中成员的$r$-参数开折. 更精确地说,以下总假定

$$F(u,x)=(u,f(u,x)),f_u(x)=f(u,x),$$

$$G(u,x)=(u,g(u,x)),g_u(x)=g(u,x),$$

其中$u\in\mathbb{R}^r,x\in\mathbb{R}^n,f(u,x),g(u,x)\in\mathbb{R}^p$,并且$f_0,g_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$在点$0\in\mathbb{R}^n$的秩为0. 另外还假定开折的初始速度$\dot{F}_i,\dot{G}_j\in\varepsilon^\circ(n,p)$. 令$\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$中的子集

$$S(r,n,p)=\{F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)\ \text{为稳定芽,且}\ rk_0F=r\}.$$

对于$F\in S(r,n,p)$,据定理12.1.2,由$f_0(x)=f(0,x)$定义的$f_0\in\varepsilon^\circ(n,p)$满足

$$T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^\circ(n,p),$$

或

$$T\mathscr{K}(f_0)+\mathbb{R}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f_0}{\partial x_n},\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\right\}=\varepsilon^{\circ}(n,p),$$

因此 $T\mathscr{K}(f_0)$在 $\varepsilon^{\circ}(n,p)$中的余维数不大于 $n+r$. 令 $\varepsilon^{\circ}(n,p)$中的子集

$$K(r,n,p)=\{f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)\mid rk_0f=0,$$

$$\dim_{\mathbb{R}}\varepsilon^{\circ}(n,p)/T\mathscr{K}(f_0)\leqslant r+n\}.$$

定理 12.2.1 稳定映射芽 F 是与G 是 $\mathscr{A}$-等价的当且仅当f_0和 g_0 是 $\mathscr{K}$-等价的.

该定理表明,对应

$$S(r,n,p)\to K(r,n,p),\ F\mapsto f_0,$$

诱导出 $S(r,n,p)$中成员的 $\mathscr{A}$-等价类所成之集到$K(r,n,p)$中成员的 $\mathscr{K}$-等价类所成之集的双射. 本定理称为稳定芽的基本分类定理,由 Mather 获得,证明放在下一节.

定理 12.2.2 $S(r,n,p)$中的每一芽 F 和它在点 $0\in\mathbb{R}^{r+n}$的$(r+2)$阶 Taylor 多项式芽是 $\mathscr{A}$-等价的.

证 任取 $F\in S(r,n,p)$,相应的 $f_0\in K(r,n,p)$. 据定理 12.1.2,

$$T_e\mathscr{K}(f_0)+\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{\dot{F}_1,\cdots,\dot{F}_r\}=\varepsilon^{\circ}(n,p),$$

并且从该定理证明过程中得到

$$T_e\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^{r}\cdot\varepsilon^{\circ}(n,p)=\mathscr{M}_n^{r+1}\cdot\varepsilon(n,p),$$

于是更有

$$T\mathscr{K}(f_0)\supset\mathscr{M}_n^{r+2}\cdot\varepsilon(n,p).$$

据定理 10.3.1, f_0 是$(r+2)$-$\mathscr{K}$-决定的,因而 f_0 与它的$(r+2)$阶 Taylor 多项式 $j^{r+2}f_0$ 是 $\mathscr{K}$-等价的. 另外,由推论 12.1.2, $j^{r+2}F$ 是

稳定的，并且它是 $j^{r+2}f_0$ 的 r-参数开折．那么根据定理 12.2.1，F 与 $j^{r+2}F$ 必 $\mathscr{A}$-等价．证毕．

现在介绍一种求标准形的方法．所谓求标准形是对 $S(r,n,p)$中的映射芽，在每一个 $\mathscr{A}$-等价类里选一个代表元，并选取适当的坐标系，使得这个代表元有简单的代数表达式．为此，首先对 $K(r,n,p)$中的每一 $\mathscr{K}$-等价类（即 $\mathscr{K}$-轨道）选取一个次数不大于 $r+2$的多项式代表元 f（并且要求它尽可能简单）．然后对每一个这样的 f，在 $\varepsilon^{\circ}(n,p)$中选取 $g_1,\cdots,g_r$，要求它们是次数不大于 $r+2$的多项式，并且满足

$$T_e\mathscr{K}(f)+\mathbb{R}\{g_1,\cdots,g_r\}=\varepsilon^{\circ}(n,p).$$

最后作线性开折

$$F(f):(u,x)\mapsto(u,f(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(x)),$$

依定理 12.1.2，$F(f)$是稳定芽．

定理 12.2.1 说明上述办法至少在理论上可以提供 $S(r,n,p)$的所有标准形．

由于按 $\mathscr{K}$-等价分类映射芽比按 $\mathscr{A}$-等价分类要容易，下面就 $K(r,n,p)$进一步考虑按 $\mathscr{K}$-轨道分类问题．命题 8.4.1 告诉我们，二映射芽 $f,g\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$属于同一条 $\mathscr{K}$-轨道当且仅当存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$，使得 $h^*(g^*\mathscr{M}_p)=f^*\mathscr{M}_p$．

现假定 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$为 FST．据定理 10.6.1，存在 k，使得

$$T\mathscr{K}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p),$$

依定理 10.3.1，f 是 k-$\mathscr{K}$-决定的．

命题 12.2.1 设 $f\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$满足

$$T\mathscr{K}(f)\supset\mathscr{M}_n^k\cdot\varepsilon(n,p),\qquad k\geqslant 1,$$

则轨道 $\mathscr{K}\cdot f$ 由满足下列条件的映射芽 $g\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$组成，该条件为：理想 $j^k(g^*\mathscr{M}_p)$与 $j^k(f^*\mathscr{M}_p)$在代数 J_n^k 中是同构的．

令

$$Q_k(f) = J_n^k / j^k(f^* \mathcal{M}_p),$$

显然 $Q_k(f)=\varepsilon_n/(\langle f_1,\cdots,f_p\rangle+\mathcal{M}_n^{k+1})$是有限维实代数.

推论 12.2.1 在命题 12.2.1 的假设条件下,轨道 $\mathcal{K}\cdot f$ 可写为

$$\mathcal{K}\cdot f = \{g \in \varepsilon^\circ(n,p) \mid Q_k(g) \cong Q_k(f)\}.$$

上述二结论的证明留作练习.

现回到原来的问题.设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,y=f(u,x))$是芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开折.令

$$Q(F) = \varepsilon_{u,x}/F^* \mathcal{M}_{u,y},$$

$$Q(f_0) = \varepsilon_x/f_0^* \mathcal{M}_y.$$

显然 $Q(F)\cong Q(f_0)$,因为 $\varepsilon_{u,x}/F^*\mathcal{M}_{u,y}\cong\varepsilon_x/f_0^*\mathcal{M}_y$.

定理 12.2.3 设 $F,G\in S(r,n,p)$,则 F 与 G 是 $\mathcal{A}$-等价的当且仅当实代数$Q_{r+2}(F)$与 $Q_{r+2}(G)$是同构的.

证明留作练习.

本定理称为稳定芽的基本代数分类定理,也是 Mather 获得的又一深刻结果(参见文献[49]).

§12.3 定理 12.2.1 的证明

12.3.1 嵌入开折中的映射芽

设 C^∞ 芽 $G:(\mathbb{R}^{r+n},0)\to(\mathbb{R}^{r+p},0)$在点 O 的秩为 r, $\Sigma_p\subset\mathbb{R}^{r+p}$是余维为 r 的子流形芽且包含点 $0\in\mathbb{R}^{r+p}$.若 Σ_p 与子空间 $\mathrm{Im}DG(0)\subset\mathbb{R}^{r+p}$在点 O 相横截,即 $G\pitchfork_0\Sigma_p$,则 $G^{-1}(\Sigma_p)=\Sigma_n$ 是 $\mathbb{R}^{r+n}$中包含原点的子流形芽,其余维数为 r.显然 Σ_n 在点 0 的切

空间 $T_0\Sigma_n=\mathrm{KerD}G(0)$. 令

$$g = G|\Sigma_n:(\Sigma_n,0)\to(\Sigma_p,0),$$

g 在点 0 的秩为 0. 注意 Σ_n 和 Σ_p 分别为$\mathbb{R}^{r+n}$与$\mathbb{R}^{r+p}$中的 n 维和 p 维子流形,选取 Σ_n 与 Σ_p 中的局部坐标,g 确定一个从$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^p$ 的映射芽. 按以上这种方式确定的每一个映射芽($\in\varepsilon^\circ(n,p)$)叫做嵌入 G 中的映射芽.

现设 $F:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),(u,x)\mapsto(u,y=f(u,x))$为芽 $f_0:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0),f_0(x)=f(0,x)$的 r-参数开折,以下总假定

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(0,0) = 0,$$

几何上它表示$\mathbb{R}^r\times\{0\}\subset\mathrm{ImD}F(0,0)$.

嵌入开折 F 中的每一芽 $g\in\varepsilon^\circ(n,p)$可依下列方式得到. 假设$\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p$ 中的 p 维子流形芽Σ_p 包含原点且横截于$\mathbb{R}^r\times\{0\}$,那么 Σ_p 可用下列方程来确定

$$u = \Psi(y),\ \Psi:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^r,0), \tag{1}$$

于是 $\Sigma_n=F^{-1}(\Sigma_p)$是$\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 中包含原点的 n 维子流形芽,它可由下列隐方程来确定

$$u = \Psi(f(u,x)), \tag{2}$$

该方程具有形如

$$u = \phi(x),\ \phi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r,0) \tag{3}$$

的惟一解. 令

$$g = F\mid\Sigma_n:(\Sigma_n,0)\to(\Sigma_p,0),$$

利用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,\cdots,y_p)$分别作为 Σ_n 与Σ_p 的局部坐标,那么 g 可写为

$$g(x) = f(\phi(x),x). \tag{4}$$

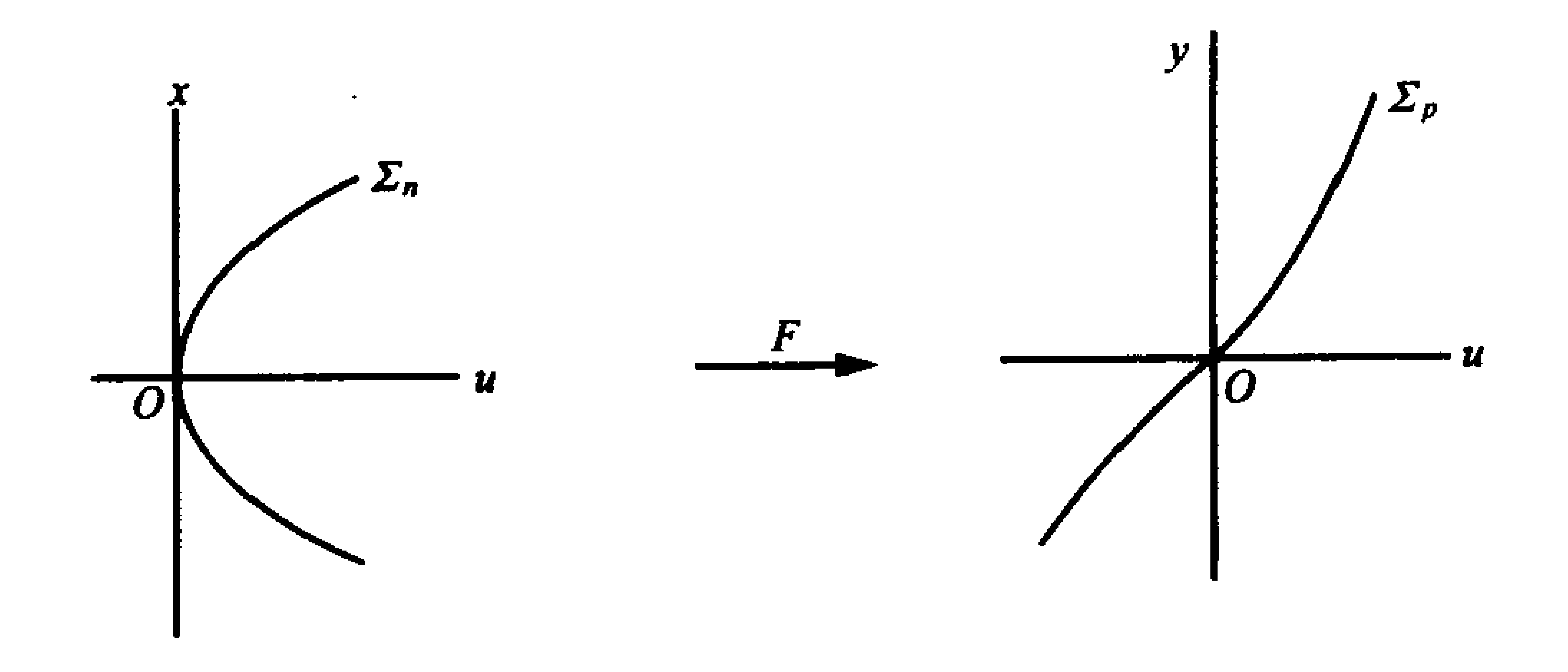


图 12.2

命题 12.3.1 设 F, f_0, g 如上所述,其中 F 为 f_0 的 r-参数开折,g 为嵌入开折 F 中的芽,则

$$g^* \mathcal{M}_p = f_0^* \mathcal{M}_p.$$

证 设 $f=(f_1,\cdots,f_p), f_0=(f_{0,1},\cdots,f_{0,p}), g=(g_1,\cdots,g_p)$,则有

$$f_i(u,x) = f_{0,i}(x) + \sum_{j=1}^{r} u_j \cdot f_{ij}(u,x) \quad i = 1,\cdots,p.$$

依(4)式,有

$$g_i(x) = f_i(\phi(x),x) = f_{0,i}(x) + \sum_{j=1}^{r} \phi_j(x) \cdot f_{ij}(\phi(x),x),$$
$$i = 1,\cdots,p, \tag{5}$$

又

$$\Psi_i(y) = \sum_{j=1}^{p} y_j \cdot \Psi_{ij}(y), \quad i = 1,\cdots,r.$$

由(2)与(3)式,得

$$\phi_j(x) = \Psi_j(f(\phi(x),x)) = \Psi_j(g(x))$$

$$= \sum_{k=1}^{p} g_k(x)\Psi_{jk}(g(x)), \qquad j = 1,\cdots,r,$$

将上式代入(5)式中,得

$$g_i(x) = f_{0,i}(x) + \sum_{k=1}^{p} g_k(x)\cdot h_{ik}(x), \qquad i = 1,\cdots,p, \tag{6}$$

其中 $h_{ik}(x) = \sum_{j=1}^{r}\Psi_{jk}(g(x))\cdot f_{ij}(\phi(x),x)$. 因 $f_{ij}(0)=0$,故 $h_{ik}(0)=0$. 现把方程(6)写成矩阵形式,

$$(I - H)\cdot g = f_0,$$

其中 I 为 $p\times p$ 单位矩阵,$H(x)=(h_{ik}(x))_{1\leqslant i,k\leqslant p}$ 且 $H(0)=(h_{ik}(0))$为 $p\times p$ 零矩阵,于是 $I-H$ 是可逆矩阵,从而命题得证.

推论 12.3.1 设 F 是$f_0\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$的 r-参数开折,则嵌入 F 中的每一映射芽 $g\in\varepsilon^{\circ}(n,p)$必 $\mathscr{K}$-等价于f_0.

定理 12.2.1 的必要性证明 设 $F,G\in S(r,n,p)$,它们分别是 f_0 与 g_0 的 r-参数开折. 显然 $f_0,g_0\in K(r,n,p)$. 若 G 与F 是 $\mathscr{A}$-等价的,则 g_0 是嵌入 F 中的映射芽. 据推论 12.3.1,g_0 必 $\mathscr{K}$-等价于f_0.

12.3.2 基本引理及推论

为证明定理 12.2.1 的充分性,还需作如下准备,先介绍有关记号.

如通常一样,用 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$及$\varepsilon_{\lambda,u,y}$表$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$和$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$上的函数芽环. 由坐标函数 $u_1,\cdots,u_r,x_1,\cdots,x_n$ 所生成的$\varepsilon_{\lambda,u,x}$中的理想记为 $\mathscr{M}_{u,x}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,x}$. 类似地,环 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$ 中的理想 $\mathscr{M}_{u,y}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,y}$ 由 $u_1,\cdots,u_r,y_1,\cdots,y_p$ 生成.

引理 12.3.1 设 $f_0\in K(r,n,p)$. 假定

$$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),$$

$$(\lambda, u, x) \mapsto (\lambda, u, f(\lambda, u, x))$$

是 f_0 的$(r+1)$-参数开折(因而 $f_0(x)=f(0,0,x)$),使得

$$F_0:(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, 0),$$

$$(u, x) \mapsto (u, f(0, u, x))$$

是 f_0 的稳定开折,那么

$$\mathcal{M}_{u,x} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + \mathcal{M}_{u,y} \cdot \left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\}$$

$$= \mathcal{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + F^* \mathcal{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\},$$

其中 $\mathcal{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ 表示 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-子模,由诸 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 的线性组合组成,系数取自 $\mathcal{M}_{u,x}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,x}$,$\mathcal{M}_{u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\}$ 表示有限生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模,$e_1, \cdots, e_p$ 为 $\mathbb{R}^p$ 的标准基. 又 $F^* \mathcal{M}_{u,y}$ 表示由 $u_1 \cdots, u_r, f_1, \cdots, f_p$ 生成的环 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$ 中的理想,$f_1, \cdots, f_p$ 为 f 的分量. 显然 $F^* \mathcal{M}_{u,y} \subset \mathcal{M}_{u,x}$,因而 $F^* \mathcal{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}$ 是 $(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}$ 的 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-子模.

证 据定理 12.1.1,F_0 是稳定的当且仅当

$$T_e\mathscr{A}(f_0) + \varepsilon_p\{\dot{F}_{0,1}, \cdots, \dot{F}_{0,r}\} = \varepsilon(n, p), \tag{7}$$

其中 $T_e\mathscr{A}(f_0) = \varepsilon_x\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_y\{e_1, \cdots, e_p\}$,$\dot{F}_{0,i}(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(0,0,x)$,因而(7)式可写为

$$\varepsilon_x\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_y\{e_1, \cdots, e_p, \dot{F}_{0,1}, \cdots, \dot{F}_{0,r}\} = (\varepsilon_x)^{\times p}. \tag{8}$$

令

$$M = (\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p} \Big/ \varepsilon_{\lambda,u,x} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\},$$

它是有限生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,x}$-模.借助于 F^*,M 可视为 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模.又令

$$M_0 = M/\mathscr{M}_{\lambda,u} \cdot M \cong (\varepsilon_x)^{\times p} \Big/ \varepsilon_x \cdot \left\{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\},$$

它是有限生成的 ε_x-模,借助于环同态 f_0^*,可看作是 ε_y-模.由条件(8)知,M_0 是有限生成的 ε_y-模,根据定理 5.3.3,M 必为有限生成的 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模,并且有

$$\varepsilon_{\lambda,u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + \varepsilon_{\lambda,u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\} = (\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}. \tag{9}$$

将上式两边均看作 $\varepsilon_{\lambda,u,y}$-模,用 $\mathscr{M}_{u,y}$ 乘(9)式两边,并注意到 $F^*\mathscr{M}_{u,y} = \mathscr{M}_{u,y} \cdot \varepsilon_{\lambda,u,x}$,有

$$\begin{aligned} F^*\mathscr{M}_{u,y} \cdot \left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + \mathscr{M}_{u,y}\left\{e_1, \cdots, e_p, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r}\right\} \\ = F^*\mathscr{M}_{u,y}(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p} = F^*\mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}, \end{aligned}$$

再将 $\mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ 添加于上式两边,并注意 $\mathscr{M}_{u,x} \supset F^*\mathscr{M}_{u,y}$,便得到本引理.

现考虑这一引理的几何意义.假设开折 F 的速度$\frac{\partial f}{\partial \lambda}$满足下列条件:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} \in \mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + F^*\mathscr{M}_{u,y}\{e_1, \cdots, e_p\}. \tag{10}$$

特别,$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda,0,0) = 0$ 对所有 λ 皆成立,因而 $f(\lambda,0,0) = 0$.于是

对每一 $\lambda\in\mathbb{R}$,映射芽

$$F_\lambda:(u,x)\mapsto(u,f(\lambda,u,x))$$

满足 $F_\lambda(0,0)=(0,0)$,F_λ 可以看作是$\varepsilon^\circ(r+n,r+p)$中一元.

推论 12.3.2 条件如引理 12.3.1 所述,另外还假定(10)式成立.那么对充分小的 λ,F_λ 必 $\mathscr{A}$-等价于F_0.

证 F 可看作F_0 的 1-参数开折,参数为 λ.欲证对充分小的 λ,$F_\lambda\underset{\mathscr{A}}{\sim}F_0$,只需证明 F 是 $\mathscr{A}$-平凡的(见定义 8.2.1).根据命题 8.2.1,只需寻找$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)$及$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$上的向量场芽

$$\widetilde{X}=\frac{\partial}{\partial\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\xi_i(\lambda,u,x)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n}X_j(\lambda,u,x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

及

$$\widetilde{Y}=\frac{\partial}{\partial\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\eta_i(\lambda,u,y)\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{p}Y_j(\lambda,u,y)\frac{\partial}{\partial y_j},$$

使得

$$\mathrm{D}F\cdot\widetilde{X}=\widetilde{Y}\circ F, \tag{11}$$

其中 $\xi_i,X_j\in\mathscr{M}_{u,x}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,x}$,$\eta_i$,$Y_j\in\mathscr{M}_{u,y}\cdot\varepsilon_{\lambda,u,y}$.

类似于定理 12.1.1 证明中的计算,可以证明上述方程(11)有解 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 当且仅当

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}\in\mathscr{M}_{u,x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}+\mathscr{M}_{u,y}\left\{e_1,\cdots,e_p,\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}\right\},$$

而假设(10)及引理 12.3.1 保证$\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$满足这一条件.

12.3.3 定理 12.2.1 的充分性证明

将证明分为下列 3 步:

1) 设 $f_0\in K(r,n,p)$.断言:f_0 的任意两个 r-参数稳定开折必 $\mathscr{A}$-等价.设

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+g(u,x)),g(0,x)=0$$

为 f_0 的 r-参数稳定开折，g 可写为

$$g(u,x)=\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(u,x)=\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(0,x)+\sum_{i=1}^{r}u_is_i(u,x),$$

这里 $s_i(u,x)=h_i(u,x)-h_i(0,x)$.

考虑映射 $\bar{F}$，它定义在$\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n$ 的一邻域上，取值于$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p$ 中，

$$\bar{F}(\lambda,u,x)=(\lambda,u,\bar{f}(\lambda,u,x)),$$

$$\bar{f}(\lambda,u,x)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(0,x)+\lambda\sum_{i=1}^{r}u_is_i(u,x),$$

易见 $\bar{f}(\lambda,0,0)=0$，又对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，

$$\bar{F}_\lambda:(u,x)\mapsto(u,\bar{f}(\lambda,u,x))$$

是 f_0 的稳定开折，因为它具有与 $F=\bar{F}_1$ 相同的初始速度. 又

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{r}u_is_i\in\mathcal{M}_u\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}_{u,x})^{\times p}\subset\bar{F}^*\mathcal{M}_{u,y}\{e_1,\cdots,e_p\}.$$

依推论 12.3.2 可推出，对每一 $\lambda_0\in\mathbb{R}$，只要 λ-λ_0 充分小，$\bar{F}_\lambda$ 必 $\mathcal{A}$-等价于 $\bar{F}_{\lambda_0}$. 由此可知，对所有 λ，$\bar{F}_\lambda$ $\mathcal{A}$-等价于 $\bar{F}_0$. 特别，$\bar{F}_1=F$ $\mathcal{A}$-等价于线性开折 $\bar{F}_0$. 余下只需证明线性开折必 $\mathcal{A}$-等价. 设

$$F(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(x))$$

和

$$G(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ik_i(x))$$

是 f_0 的两个稳定线性开折. 使用线性插值，容易证明存在 C^∞ 映射 $g_i(\lambda,x)(\lambda\in\mathbb{R},i=1,\cdots,r)$，使得

$$\widetilde{F}_\lambda(u,x)=(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ig_i(\lambda,x)=f(\lambda,u,x))$$

对所有 λ 皆为 f_0 的稳定开折，并且 $\widetilde{F}_0=F,\widetilde{F}_1=G$. 又因

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{r}u_i\frac{\partial g_i}{\partial\lambda}(\lambda,x)\in\mathcal{M}_u\cdot(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}\subset\widetilde{F}^*\mathcal{M}_{u,y}\cdot\{e_1,\cdots,e_p\},$$

再一次使用推论 12.3.2 可以证明 $\widetilde{F}_1=G$ 与 $\widetilde{F}_0=F$ 是 $\mathcal{A}$-等价的.

2) 设 $F,G\in S(r,n,p)$ 分别为 $f_0,g_0\in K(r,n,p)$ 的稳定开折. 假定 f_0 和 g_0 是 $\mathcal{K}$-等价的，据命题 8.4.1，存在可逆芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$，使得

$$h^*(g_0^*\mathcal{M}_p)=(g_0\circ h)^*\mathcal{M}_p=f_0^*\mathcal{M}_p. \qquad (12)$$

令 $G'=G\circ(1_{(\mathbb{R}^r,0)}\times h)$，其中 $1_{(\mathbb{R}^r,0)}$ 表 $(\mathbb{R}^r,0)$ 上的恒同映射芽，显然 G' 是 $g_0\circ h=g'_0$ 的 r-参数开折，并且 G' 与 G 是 $\mathcal{A}$-等价的. 由 (12) 式知，$g'^*_0\mathcal{M}_p=f_0^*\mathcal{M}_p$. 据推论 8.4.1，存在可逆 $p\times p$ 矩阵 $M(x)$，使得 $g'_0(x)=M(x)f\setminus-0(x)$，这里 $\det M(0)\neq0$. 倘若 $\det M(0)<0$，考虑下列映射芽的复合：

$$(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\xrightarrow{G'}(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)\xrightarrow{1_{(\mathbb{R}^r,0)}\times k}(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0),$$

其中 $k:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为线性自同构芽且 $\det k<0$，显然 $G''=(1_{(\mathbb{R}^r,0)}\times k)\circ G'$ 与 G' 是 $\mathcal{A}$-等价的并且 G'' 是 $g''_0=k\circ g'_0$ 的稳定开折，其中

$$g''_0(x)=k\circ M(x)\cdot f_0(x),\ \det k\circ M(0)>0,$$

于是论证归结为

3) 设 $f_0,g_0\in K(r,n,p)$ 合于

$$g_0(x)=M(x)\cdot f_0(x),$$

其中可逆 $p\times p$ 矩阵 $M(x)$ 满足 $\det M(0)>0$，需证存在 f_0,g_0 的

开折 $F,G\in S(r,n,p)$,使得 F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的.

由 1)可假定 $F\in S(r,n,p)$是 f_0 的稳定线性开折,即 F 可表为

$$F:(u,x)\mapsto\left(u,f_0(x)+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i(x)\right).$$

在一般线性群 $\mathrm{GL}(p,\mathbb{R})$的包含单位元 I 的连通分支内取一条C^∞ 道路 $A(\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$,使得 $A(0)=I,A(1)=M(0)$.令

$$\tilde{f}_\lambda(x)=f(\lambda,x)=M(\lambda,x)\cdot f_0(x)$$

其中 $M(\lambda,x)=M_\lambda(x)=A(\lambda)+M(x)-M(0)$.依定义,有 $\tilde{f}_1(x)=g_0(x)$.注意到 $M(\lambda,0)=A(\lambda)$,有

$$\tilde{f}_\lambda^*\mathscr{M}_p=f_0^*\mathscr{M}_p,\quad \text{对所有 } \lambda\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

现在定义 $F_\lambda:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^p,0)$为

$$F_\lambda(u,x)=(u,\bar{f}(\lambda,u,x)),$$

其中 $\bar{f}(\lambda,u,x)=M(\lambda,x)\cdot(f_0(x)+\sum\limits_{i=1}^{r}u_ih_i(x))$,于是

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial\lambda}=\frac{\partial M}{\partial\lambda}\cdot\left(f_0+\sum_{i=1}^{r}u_ih_i\right)\in F^*\mathscr{M}_{u,y}\cdot(\varepsilon_{\lambda,u,x})^{\times p}.$$

如果能证明:对所有 λ,F_λ 是 $\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折,那么据推论 12.3.2 可推出所有 F_λ 均 $\mathscr{A}$-等价于F_0.特别 $F_1=G$ 和F_0 是 $\mathscr{A}$-等价的.而 $F_0\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$,故 $G\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$.余下证明 F_λ 是$\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折.

由 F 的稳定性并依定理 12.1.2,有

$$J(f_0)+f_0^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{h_1,\cdots,h_r\}=\varepsilon^0(n,p), \tag{14}$$

其中 $J(f_0)=\varepsilon_n\left\{\dfrac{\partial f_0}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial f_0}{\partial x_n}\right\}$为$f_0$ 的 Jacobi 模.由(13)式有

$$\tilde{f}_\lambda^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)=f_0^*\mathscr{M}_p\cdot\varepsilon(n,p),\quad \text{对所有 } \lambda,$$

另一方面,

$$\frac{\partial\tilde{f}_\lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial M_\lambda}{\partial x_i}\cdot f_0+M_\lambda\cdot\frac{\partial f_0}{\partial x_i}.$$

因 $M_\lambda(0)$是可逆的,容易推出

$$J(\tilde{f}_\lambda)+\tilde{f}_\lambda^*\mathcal{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)=M_\lambda(J(f_0)+f_0^*\mathcal{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)).$$

将(14)式乘以 M_λ 得到

$$J(\tilde{f}_\lambda)+\tilde{f}_\lambda^*\mathcal{M}_p\cdot\varepsilon(n,p)+\mathbb{R}\{M_\lambda\cdot h_1,\cdots,M_\lambda\cdot h_r\}=\varepsilon^\circ(n,p),$$

再一次应用定理 12.1.2 便得到 F_λ 是$\tilde{f}_\lambda$ 的稳定开折.

§12.4 稳定芽分类举例

稳定映射芽分类的基本理论告诉我们,稳定芽按 $\mathscr{A}$-等价分类可归结为映射芽按 $\mathscr{K}$-等价分类.如果对稳定芽的维数及 Boardman 符号作适当限制,并利用 §11.4 中映射芽 $\mathscr{K}$-等价的结果,有可能获得稳定芽分类的结果.本节仅限于一些简单情形的讨论.

设 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为 C^∞映射芽,$n\leqslant p$.若 f 是非奇异芽因而是浸入芽,则 f 必属于 Σ^0 类,并且明显地是稳定芽.下面研究具有 Σ^1 类奇点的稳定芽.

定理 12.4.1 (Morin[58]) 设 $n\leqslant p$.若 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$为属于 Σ^1 类的稳定芽,则 F 必为$\Sigma^{1_k,0}$类奇点,其中整数 k 合于 $1\leqslant k\leqslant n/q(q=p-n+1)$.进而可得到 F 必 $\mathscr{A}$-等价于芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,其分量为

$$\begin{cases}G_i=u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ G_{n+i}=\sum\limits_{j=1}^{k}u_{ik+j}x^j, & 0\leqslant i\leqslant q-2,\\ G_p=\sum\limits_{j=1}^{k-1}u_{(q-1)k+j}x^j+x^{k+1},\end{cases}$$

这里 $u_1,\cdots,u_{n-1},x$ 为$\mathbb{R}^n$ 的坐标.

证 由引理 11.2.1 及命题 11.4.1 知,F 必为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点,其中 k 为某一正整数. 显然 F 在点 0 的秩为 $n-1$. 据命题 11.4.2,它必然 $\mathscr{A}$-等价于某一芽$f_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0)$的$(n-1)$-参数开折,这里 $q=p-n+1$.不难看出 f_0 亦为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点并且具有有限 $\mathscr{K}$-余维数.据命题 11.4.3,f_0 与映射芽

$$g_0:(\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0),\ x\mapsto g_0(x)=(0,\cdots,0,x^{k+1})$$

是 $\mathscr{K}$-等价的. 又由 §9.4 中例 2 知,g_0 的 $\mathscr{K}$-余维数为 $qk+q-1$,并且 $T_e\mathscr{K}(g_0)$在 $\mathscr{M}_1\cdot\varepsilon(1,q)$中的补空间的基由诸$(0,\cdots,x^j,\cdots,0)$组成$(1\leqslant j\leqslant k)$,但除去$(0,\cdots,0,x^k)$. 定义 g_0 的$(qk-1)$-参数形变$g:(\mathbb{R}^{qk-1}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^q,0)$如下:记 g 的分量为$g_1,\cdots,g_q$,令

$$g_{i+1}=\sum_{j=1}^{k}u_{ik+j}x^j,\quad 0\leqslant i\leqslant q-2,$$

$$g_q=\sum_{j=1}^{k-1}u_{(q-1)k+j}x^j+x^{k+1}.$$

显然所取的 k 应满足 $qk-1\leqslant n-1$,因而 $1\leqslant k\leqslant n/q$. 然后定义 $G:(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^q,0)$为

$$\begin{cases} G_i=u_i, & 1\leqslant i\leqslant n-1,\\ G_{n+i}=g_{i+1}, & 0\leqslant i\leqslant q-2,\\ G_p=g_q. \end{cases}$$

由定理 12.1.2,G 是稳定映射芽,再由定理 12.2.1,F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的. 证毕.

特别,将本结果的等维数情形(即 $n=p$)单独列出来,这就是

推论 12.4.1 设 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$为 Σ^1 类稳定芽,则它必为 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点$(1\leqslant k\leqslant n)$并且 $\mathscr{A}$-等价于芽$G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,$

0),其分量为

$$\begin{cases}G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ G_n = \sum_{j=1}^{k-1} u_j x^j + x^{k+1}.\end{cases}$$

它是我们曾经讨论过的广义 Whitney 映射(见定理 9.3.1). 当 $n=2, k=2$ 时便是 Whitney 尖点映射.

下面在 $n \geqslant p$ 的情形下讨论稳定芽 $(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$. 最简单的情形是非奇异芽,这样的芽必属于 Σ^{n-p} 类,自然是稳定的,其标准形为投影 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_p)$. 接下来讨论具有 Σ^{n-p+1} 类奇点的稳定芽,从稳定芽分类的基本理论可知,这样的芽 $\mathscr{A}$-等价于某一芽 $f:(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ 的 $(p-1)$-参数开折,这里 $m = n - p + 1$. 又芽 f 也属于 Σ^{n-p+1} 类并且具有有限 $\mathscr{K}$-余维. 回顾对函数芽分类所作的讨论,给人们的印象似乎是 f 的"复杂"程度取决于它的余秩 c,然而余秩 c 以及二阶 Boardman 符号都依赖于 f 的 2-导网,所以自然猜想它们之间有一定关联.

命题 12.4.1 设芽 $f:(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ 是 Σ^m 类奇点,则 f 属于 $\Sigma^{m,c}$ 类当且仅当 f 有余秩 c.

证 因 f 属于 Σ^m 类,则由 f 及偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ 生成的理想 $\Delta^m I(f)$ 是临界理想. 理想 $\Delta^s \Delta^m I(f)$ 由 $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ 以及它们的 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

的$(m-s+1)$阶子式所生成.

$\Delta^s\Delta^m I(f)$为真理想的条件是它的所有生成元不含常数项,即所有$(m-s+1)$阶子式在点$0\in\mathbb{R}^m$的值为0.除去上述Jacobi矩阵的第一行,余下的恰好是f的Hessian矩阵.因为所有的$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$在点0的值为0,因此$\Delta^s\Delta^m I(f)$为真理想的条件是$f$的Hessian矩阵的余秩不小于$s$.而$\Delta^s\Delta^m I(f)$为临界理想的条件是$f$的Hessian矩阵恰好有余秩$s$.取$s=c$,易见$f$属于$\Sigma^{m,c}$类当且仅当$f$的余秩为$c$. □

对于函数芽按$\mathscr{K}$-等价分类,有下列分裂引理,而且证明与命题3.4.1所给出的恰好相同,在此从略.

引理 12.4.1 设$f\in\mathscr{M}_n^2$具有有限$\mathscr{K}$-余维,并且余秩为c,则f $\mathscr{K}$-等价于芽

$$g(x_1,\cdots,x_c)\pm x_{c+1}^2\pm\cdots\pm x_n^2,$$

其中$g\in\mathscr{M}_c^3$.

特别当f的余秩为0或1时,有下面两个定理,由Morin所建立(参看文献[58]).

定理 12.4.2 设$n\geqslant p$.若稳定芽$F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$属于$\Sigma^{n-p+1,0}$类,则$F$ $\mathscr{A}$-等价于芽$G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,其分量为

$$G_i=u_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant p-1,$$

$$G_p=\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_{n-1}^2\pm x_n^2,$$

证 如前面所述,F $\mathscr{A}$-等价于某个芽$f:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R},0)$的$(p-1)$-参数开折,其中$m=n-p+1$.芽$f$属于$\Sigma^{m,0}$类而且具有有限$\mathscr{K}$-余维.据命题12.4.1,$f$的余秩为0,因而根据Morse引理,$f$ $\mathscr{R}$-等价因而$\mathscr{K}$-等价于芽$\pm x_p^2\pm\cdots\pm x_n^2$.由定理12.1.2知,

定理中所述的 G 作为函数芽 $\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2$ 的 $(p-1)$-参数开折是稳定的,再由定理 12.2.1,F 与 G 是 $\mathscr{A}$-等价的.

定理 12.4.3 设 $n \geqslant p$. 如果 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 为属于 $\Sigma^{n-p+1,1}$ 类的稳定芽,那么 F 必属于 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类,其中 1 重复出现 k 次,$1 \leqslant k \leqslant p-1$. 并且在这一情形下,$F$ $\mathscr{A}$-等价于 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$,定义为

$$G_i = u_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-1,$$

$$G_p = \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^{k+2} + \sum_{j=1}^{k} u_j x_n^j.$$

证 F 为 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类奇点是引理 11.2.1 和命题 11.4.1 的直接推论. 如前所述,F $\mathscr{A}$-等价于芽 $f:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R},0)$ 的 $(p-1)$-参数开折 $(m=n-p+1)$. 又 f 具有限 $\mathscr{K}$-余维并且亦为 $\Sigma^{n-p+1,1,\cdots,1,0}$ 类奇点. 显然 f 的余秩为 1. 据分裂引理 12.4.1,f 与下列芽

$$\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 + g_1(x_n)$$

是 $\mathscr{K}$-等价的,这里 $g_1 \in \mathscr{M}_1^3$ 且 g_1 具有 $\Sigma^{\overbrace{1,1,\cdots,1}^{k+1},0}$ 类奇点. 依命题 11.4.3,g_1 与芽 $\pm x_n^{k+2}$ 是 $\mathscr{K}$-等价的,从而 f 与芽 $\pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^{k+2}$ 是 $\mathscr{K}$-等价的. 简记后面的函数芽为 g. $T_e\mathscr{K}(g)$ 由 $x_p,\cdots,x_{n-1}$ 及 x_n^{k+1} 生成,因此 $T_e\mathscr{K}(g)$ 在 $\mathscr{M}_m$ 中的补空间的基可取为 $x_n,\cdots,x_n^k$. 依定理 12.1.2,定理中所述的 G 作为 g 的 $(p-1)$-参数开折是稳定的,然后根据定理 12.2.1,$F \underset{\mathscr{A}}{\sim} G$. 证毕.

特别,上述二定理在等维数 $n=p$ 情形下便是推论 12.4.1,因此对等维数情形,接下来考虑的是属于 Σ^2 类的稳定芽.

定理 12.4.4 设稳定芽 $F:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 属于 $\Sigma^{2,0}$ 类,则它 $\mathscr{A}$-等价于下列芽 $G:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 之一:

$$
\text{型 } \mathrm{I}_{a,b} \text{ 和 } \mathrm{II}_{a,b}\begin{cases} G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant a-1, \\ G_{a-1+j} = v_j, & 1 \leqslant j \leqslant b-1, \\ G_{a+b-2+k} = w_k, & 1 \leqslant k \leqslant n-(a+b), \\ G_{n-1} = xy, & \\ G_n = x^a \pm y^b + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{b-1} v_j y^j, & \end{cases} \tag{1}
$$

其中 $a+b \leqslant n$,

$$
\text{型 } \mathrm{IV}_a\begin{cases} G_i = u_i, & 1 \leqslant i \leqslant a-1, \\ G_{a-1+j} = v_j, & 1 \leqslant j \leqslant a-1, \\ G_{2a-2+k} = w_k, & 1 \leqslant k \leqslant n-2a, \\ G_{n-1} = x^2 + y^2, & \\ G_n = x^a + \sum_{i=1}^{a-1} u_i x^i + \sum_{j=1}^{a-1} v_j x^{j-1} y, & \end{cases} \tag{2}
$$

其中 $2a \leqslant n$.

证 F 必 $\mathscr{A}$-等价于芽 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ 的 $(n-2)$-参数开折,其中 f 具有有限 $\mathscr{K}$-余维并且属于 $\Sigma^{2,0}$ 类. 据定理 11.4.1,芽 f 与型 $I_{a,b}$, $\mathrm{II}_{a,b}$ 及 IV_a 中之一 $\mathscr{K}$-等价.

由§9.4 中例 3 知,$g(x,y)=(xy,x^a\pm y^b)$ 的 $\mathscr{K}$-余维数为 $a+b$. $T_e\mathscr{K}(g)$ 在 $\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$ 中的补空间的基为 $(0,x^i)(1\leqslant i\leqslant a-1)$ 和 $(0,y^j)(1\leqslant j\leqslant b-1)$. 显然 a,b 应满足 $a+b\leqslant n$,从而 g 的 $(n-2)$-参数开折 G(如定理中(1)所述)是稳定芽,且与 F 是 $\mathscr{A}$-等价的.

又由§9.4中例4知，$h(x,y)=(x^2+y^2,x^a)$的$\mathscr{K}$-余维数等于$2a$. $T_e\mathscr{K}(h)$在$\mathscr{M}_2\cdot\varepsilon(2,2)$中的补空间的基为$(0,x^i)$和$(0,x^{i-1}y)(1\leqslant i\leqslant a-1)$. 显然要求$2a\leqslant n$. 从而$h$的$(n-2)$-参数开折$G$(如定理中(2)所述)是稳定芽，且$G\underset{\mathscr{A}}{\sim}F$.

§12.5 稳定映射的奇点

前面已引入光滑映射芽稳定性与无穷小稳定性的等价概念，并且对稳定映射芽的特征、分类给予了描述. 本节将对光滑映射引入稳定性概念，并且着重讨论稳定映射的奇点.

一个C^∞映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$叫做稳定的，是指任意充分接近$f$的$C^\infty$映射$g$必等价于$f$，现精确叙述如下.

定义 12.5.1 设$f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$为两个$C^\infty$映射. 如果存在微分同胚$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$和$k:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$，使得$g=k\circ f\circ h^{-1}$，即使得下列图表可换，则说$f$与$g$是$\mathscr{A}$-等价的.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p\\ h\downarrow & & \downarrow k\\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p\end{array}$$

在§2.4中，对C^∞映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$组成之集$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$引入了拓扑结构，因此定义稳定映射如下.

定义 12.5.2 C^∞映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$叫做稳定映射，如果存在$f$在$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的邻域$U$，使得对任意$g\in U$，$g$ $\mathscr{A}$-等价于f.

从定义立即可知，所有稳定映射在$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中形成一个开集. 现在问：它们是否足够多，使得任何一个C^∞映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$都可以用稳定映射来逼近它呢？再有对稳定映射是否能够分类？精确地说，所有稳定映射在映射空间$C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中是否构成一个稠密子集？是否存在有限多个$C^\infty$映射芽$(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，使得对每一个稳定映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$，它在任意点$x\in\mathbb{R}^n$的芽都$\mathscr{A}$-等价

于这有限多个芽中的一个?

关于第一个问题,Mather 给出了深刻的结果(见文献[51]),现陈述如下:

在映射空间 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中,所有常态稳定映射组成稠密子集的充要条件是维数对(n,p)满足下列条件之一:

(a) $p<7s+8$,当 $s\geqslant 4$,

(b) $p<7s+9$,当 $3\geqslant s\geqslant 0$,

(c) $p<8$,　　当 $s=-1$,

(d) $p<6$,　　当 $s=-2$,

(e) $p<7$,　　当 $s\leqslant -3$,

这里 $s=p-n$.所谓 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为常态映射(proper mapping)是指 f 为连续映射,并且对于$\mathbb{R}^p$ 中的任意紧致子集 C,它在 f 下的原像$f^{-1}(C)$为$\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集.

图 12.3 中用斜线标记的区域(含边界)表示稳定映射非稠密的区域.

关于第二个问题,也是 Mather 解决的.我们将结合前面所述

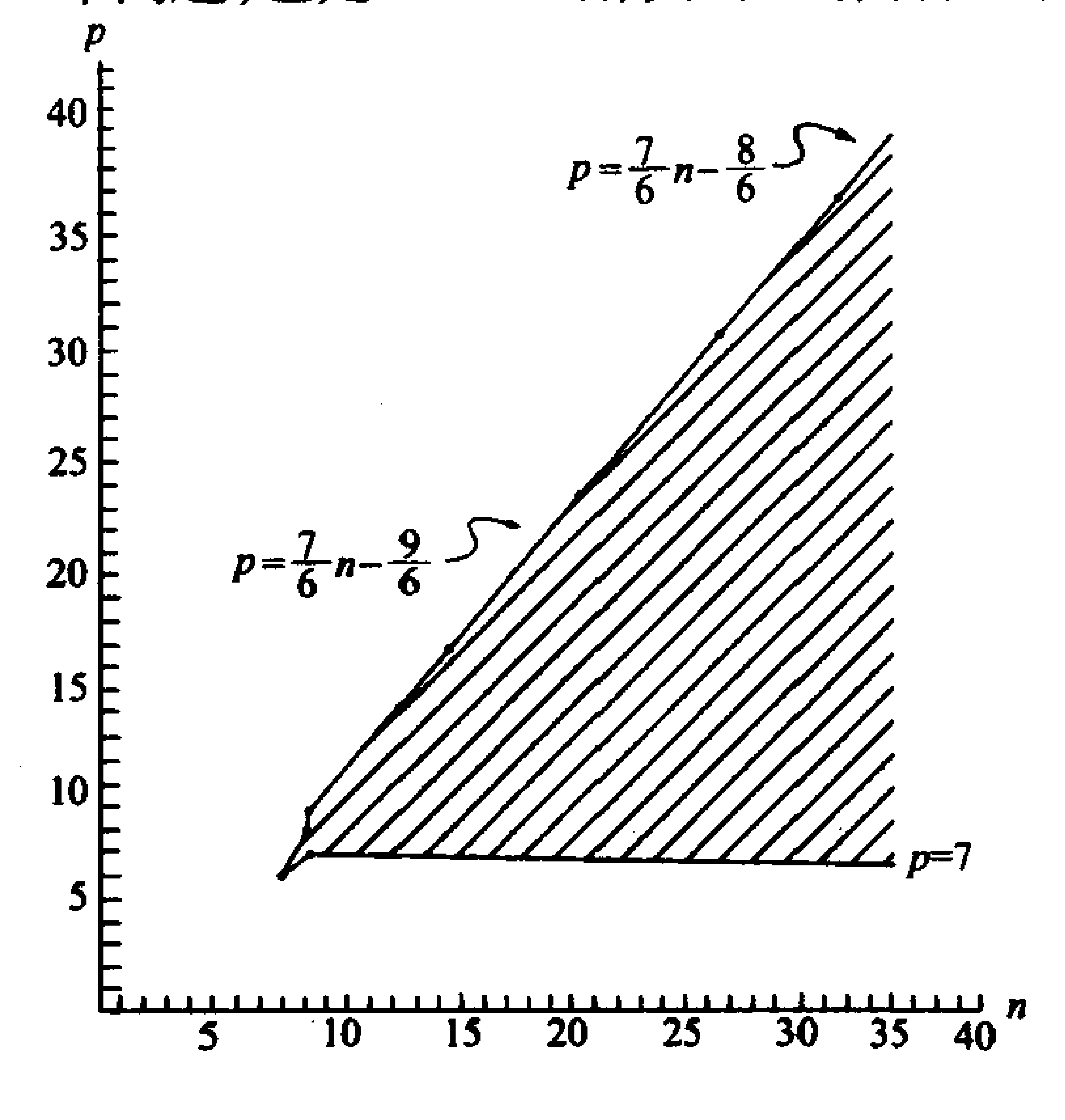


图 12.3

内容,讨论某些稳定映射可能出现的奇点类型.为此,首先介绍需用到的两个结论.

命题 12.5.1 在 Boardman 意义下,光滑映射的稳定性是通有性质.

证 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为稳定映射,k 为正整数.需证 $j_0^k f$ 横截于所有 Boardman 子流形 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}$,其中 $j_0^k f:\mathbb{R}^n\to J_{n,p}^{k,0}$ 定义为 $j_0^k f(x)=(f-f(x))$的 k 阶 Taylor 多项式.据定理 11.2.3,集

$$\mathscr{D}=\{g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射} \mid j_0^k g \pitchfork \Sigma^{i_1,\cdots,i_k}\}$$

为 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的稠密子集.因 f 是稳定的,故存在 f 在 $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$中的邻域 U,使得 U 中的每一h $\mathscr{A}$-等价于f.由于 $\mathscr{D}$ 是稠密的,可取 $g\in U\cap\mathscr{D}$,这意味着 g 与f 是 $\mathscr{A}$-等价的,且 g 满足横截性条件.余下证明 f 也满足横截性条件,请读者补述.

命题 12.5.2 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为稳定映射,则 f 在任意点 $x\in\mathbb{R}^n$ 的芽必为稳定映射芽.

证明从略.现从上述结果连同上节中得到的有关分类结论可得到下面一些定理,它们完全描述了某些稳定映射所有可能的奇点类型.为简单起见,将"$\mathscr{A}$-等价"简写成"等价".首先从等维数 $n=p$ 情形说起.

考虑稳定映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.由命题 12.5.1,$f$ 必须横截于一阶 Boardman 子流形 Σ^i.设 $n\leqslant 3$.因一阶奇点集 $\Sigma^i(f)$的余维数为 i^2,当 $i\geqslant 2$ 时,$\Sigma^i(f)=\varnothing$,因此只需考虑属于 Σ^1 类的奇点.而在等维数情形下,奇点集 $\Sigma^{1_k,0}(f)$具有余维 k(见 §11.2 中例 2),因此在 $k\leqslant n$ 时才不空.于是由命题 12.5.2 和推论 12.4.1,有

定理 12.5.1 设 $n\leqslant 3$,$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为稳定映射,则

(i) 当 $n=1$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^0: y_1=x_1 \qquad \text{(正常点)},$$

$$\Sigma^{1,0}: y_1=x_1^2 \qquad \text{(极小值点)}.$$

(ii) 当 $n=2$ 时,f 在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^0\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \end{cases} \qquad \text{(正常点)};$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^2, \end{cases} \qquad \text{(折叠)};$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2, \end{cases} \qquad \text{(尖点)}.$$

(iii) 当 $n=3$ 时，f 在任意点的芽等价于下列芽中的一个：

$$\Sigma^0\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \qquad \text{(正常点)};$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2, \end{cases} \qquad \text{(折叠)};$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^3 + x_1 x_3, \end{cases} \qquad \text{(尖点)};$$

$$\Sigma^{1,1,1,0}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^4 + x_1 x_3 + x_2 x_3^2, \end{cases} \qquad \text{(燕尾)}.$$

当 $n=4$ 时，稳定映射 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 不仅可以有 Σ^1 类奇点，还可以有 Σ^2 类奇点. 但无 Σ^i 类奇点($i\geqslant 3$)，现在 $\Sigma^2(f)$ 可分解为 $\Sigma^{2,0}(f)$ 和 $\Sigma^{2,1}(f)$ 及 $\Sigma^{2,2}(f)$，其余维数分别为 4,7 和 10，因此只能出现 $\Sigma^{2,0}$ 类奇点. 应用命题 12.5.2 和推论 12.4.1 及定理 12.4.4，得到下面的

定理 12.5.2 设 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 为稳定映射，则它在任意点的芽等价于下列芽之一：

$$\Sigma^0\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^3 + x_1x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^4 + x_1x_4 + x_2x_4^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{1,1,1,1,0}\begin{cases} y_i = x_i, 1\leqslant i\leqslant 3, \\ y_4 = x_4^5 + x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_3x_4^3; \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\Sigma^{2,0}\\ \mathrm{I}_{2,2}\end{matrix}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3x_4, \\ y_4 = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,0}_{\mathrm{II}_{2,2}}\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3 x_4, \\ y_4 = x_3^2 - x_4^2 + x_1 x_3 + x_2 x_4. \end{cases}$$

对于稳定映射$\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$,$\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^6$,仿上可以写出相应结论.但稳定映射$\mathbb{R}^7\to\mathbb{R}^7$ 可以有 $\Sigma^{2,1}$类的芽,读者如有兴趣,经过努力可获得完全的一览表.

下面讨论非等维数情形.设 $n\leqslant p$,试确定整数对(n,p)使得稳定映射$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 仅容有 Σ^1 类奇点.注意到 Σ^i 的余维数为$i(p-n+i)$,若映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 有 Σ^1 类奇点,则 $1\cdot(p-n+1)\leqslant n$,即 $p<2n$.倘若 f 无Σ^i 类奇点,这里 $i\geqslant 2$,则

$$i\cdot(p-n+i)>n,\qquad i\geqslant 2,$$

即 $2p>3n-4$,因此 f 仅容有Σ^1 类奇点,则(n,p)满足下列关系

$$3n-4<2p<4n.$$

现假定(n,p)取值在上述范围内,进而考虑 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点.因 $\Sigma^{1_k,0}$的余维数为$(p-n+1)k$,条件 $p<2n$ 保证当$k=1$ 时,有$(p-n+1)\cdot k\leqslant n$,因而不排斥 $\Sigma^{1,0}$类奇点的出现.若$(p-n+1)\cdot k>n$对$k\geqslant 2$ 成立,即若$2p\geqslant 3n-1$,则不出现 $\Sigma^{1_k,0}$类奇点,$k\geqslant 2$.于是当整数对(n,p)满足

$$3n-1\leqslant 2p<4n$$

时,f 仅容有$\Sigma^{1,0}$类奇点.(n,p)的上述取值范围有时称为亚稳定域(metastable range).再由定理 12.4.1,便得到

定理 12.5.3 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ 为稳定映射,整数对(n,p)取值于亚稳定域内,则 f 仅容有$\Sigma^{1,0}$类奇点,并且 f 在这些奇点的芽等价于芽

$$\begin{cases} y_i = x_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ y_{n-1+j} = x_j x_n, & 1 \leqslant j \leqslant p-n, \\ y_p = x_n^2. \end{cases}$$

注 $p = 2n-1$ 对应于 Whitney 的结果,此时上述芽可写为

$$\begin{cases} y_i = x_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ y_{n-1+j} = x_j x_n, & 1 \leqslant j \leqslant n-1, \\ y_p = x_n^2. \end{cases}$$

特别,$n = 2$ 对应于 Whitney 伞.

对于 $n \geqslant p$,同样可考虑(n, p)的取值范围,使得稳定映射$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ 容有简单类型的奇点.这里仅举一例.

定理 12.5.4 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 为稳定映射,则它在任意点的芽等价于下列芽之一:

$$\Sigma^1 \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,0} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^2; \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^3 + x_1 x_3. \end{cases}$$

证 $\Sigma^i(f)$具有余维数 $i(i-1)$,当 $i \geqslant 3$ 时必为空集.注意属于 Σ^1 类的芽是淹没芽,因此只可能有 Σ^2 类奇点.将 $\Sigma^2(f)$分解为 $\Sigma^{2,0}(f)$,$\Sigma^{2,1}(f)$与 $\Sigma^{2,2}(f)$,其余维数分别为 2,3 和 5;因而只需考虑前两个奇点集.在 $\Sigma^{2,0}$类的奇点处,标准形由定理 12.4.2

给出.余下仅需考虑 $\Sigma^{2,1,\cdots,1,0}$类奇点,这里假定 1 重复出现 k 次.依据计算 Σ^I 的余维数 $\nu_I(n, p)$ 的 Boardman 公式(见定理 11.2.1),容易算出 $\Sigma^{2,1_k,0}$的余维数为 $k+2$,因此考虑的只是情形 $k=0$ 和 $k=1$.对于 $k=0$ 已讨论过,对于 $k=1$,相应的标准形由定理12.4.3给出.

第十三章　在分歧问题研究中的应用

分歧理论是对具有多重解的方程(包括代数方程、微分方程等)的研究. 简单地说,所谓分歧指的是方程解的个数随参数的变化而变化,例如当参数 λ 的值由小于 0 变到大于 0 时,方程 $x^3-\lambda x=0$ 的解的个数由 1 变为 3,此时 $(0,0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 叫做分歧点. 一般来说,对于含一个状态变量 x 的局部分歧问题 $g(x,\lambda)=0$,若 (x_0,λ_0) 是分歧点,则 $g(x_0,\lambda_0)=\frac{\partial}{\partial x}g(x_0,\lambda_0)=0$,因而 (x_0,λ_0) 为奇点. 由这一最简单例子可以看出解分歧问题与奇点理论有密切关联. Golubitsky 和 Schaeffer 于 1979 年发表的两篇论文[28],[29]引入了应用奇点理论方法研究分歧问题的思想. Gaffney 在文献[20]中曾经指出,对分歧问题进行分类所使用的主要工具来自光滑映射芽的奇点理论中的相关技巧.

由于在自然科学中提出的问题不少呈现出某种对称性,对称性反映在数学中用群来刻画,因此在奇点理论中考虑等变映射芽,相应地在分歧理论中研究等变分歧问题. 局部分歧理论关心的是在分歧点附近,方程的解的数目、解的稳定性以及对称性的变化情况. 在理论研究及实际应用中,通常以紧致 Lie 群作为分歧问题的对称群. 而对称群为平凡群则表明所考虑的分歧问题不带对称性.

应用奇点理论方法与群论方法研究分歧问题,Golubitsky 等数学家撰写的两卷本专著"Singularities and Groups in Bifurcation Theory"概括了 1988 年以前的主要研究成果,本章的目的是结合 1988 年以后的部分研究成果,简要地介绍奇点理论在静态分歧问题研究中的应用,着重于两个方面的内容:一个是等变分歧问题的识别,另一个是含有多个分歧参数的等变分歧问题的开折,而不是对分歧理论作系统全面的阐述.

本章安排如下：§13.1 简要介绍紧致 Lie 群上的不变积分以及 Lie 群的线性表示. §13.2 着重于紧致 Lie 群的不变量理论中的两个深刻结果. 即 Hilbert－Weyl 定理和 Schwarz 定理. 为方便读者查阅,附录 B 证明了 Hilbert 基定理. §13.3 研究与紧致 Lie 群 Γ 可交换的 C^∞ 映射芽,对这样的等变映射芽所成之集给出了代数描述,并且介绍了 Malgrange 预备定理的等变形式. 从§13.4 至§13.6 研究等变分歧问题,引入了等变分歧问题 Γ-等价的概念(它是用分歧参数作为参数的接触等价族来描述),建立了各种形式的切空间. 特别在§13.5 中讨论分歧问题的识别,给出了幂单等价群 $U(\Gamma)$作用下的一般等价理论. 在§13.6 中探讨等变分歧问题的开折理论,陈述了等变通用开折定理的一般形式并加以证明. 从最后两节可以看出它们与奇点理论研究中的有限决定性及开折有着非常紧密的联系.

§13.1　紧致 Lie 群的 Haar 积分与线性表示

13.1.1　方程及其解的对称性

以常微分方程为例看看对称性的含义. 为简单起见,将参数省略,设

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{1}$$

其中 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射. 假设 γ 是一个可逆 $n\times n$ 矩阵,满足条件

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \text{对每一 } x\in\mathbb{R}^n, \tag{2}$$

即 γ 与 f 可交换,那么 γ 反映了方程(1)的对称性. 满足条件(2)的所有可逆 $n\times n$ 矩阵形成一个群 Γ. 事实上,若 $\gamma,\delta\in\Gamma$,则

$$f(\gamma\delta x) = \gamma f(\delta x) = \gamma\delta f(x), \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n,$$

因而 $\gamma\delta\in\Gamma$. 又令条件(2)中的 $\gamma x = y$, 有 $f(y) = \gamma f(\gamma^{-1}y)$,

$f(\gamma^{-1}y)=\gamma^{-1}f(y)$，这说明 $\gamma^{-1}\in\Gamma$. 因此我们把群 Γ 叫做方程(1)的对称群. 下面考察方程(1)的解的对称性.

设 $\gamma\in\Gamma$，若 $x(t)$ 是方程(1)的解，易见 $\gamma x(t)$ 也是方程(1)的解. 下面就两种情形讨论之：

(i)若 $x(t)\equiv x_0$ 为方程(1)的平衡解，即 $f(x_0)=0$，则 γx_0 也是方程(1)的平衡解. 如果 $\gamma x_0\neq x_0$，那么 γx_0 是方程(1)的一个异于 x_0 的"新"的平衡解. 如果 $\gamma x_0=x_0$，则 γ 表示解 x_0 具有对称性. 令

$$\Sigma_{x_0} = \{\gamma\in\Gamma \mid \gamma x_0 = x_0\},$$

易见它是 Γ 的子群，叫做平衡解 x_0 的迷向子群，反映了解 x_0 的对称程度.

对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$，集 $\Gamma x_0=\{\gamma x_0 \mid \gamma\in\Gamma\}$ 叫做过点 x_0 的群轨道. 易见，若 x_0 为方程(1)的平衡解，则过 x_0 的群轨道上的每一点也是方程(1)的平衡解，且

$$\gamma x_0 = \delta x_0 \Leftrightarrow \delta^{-1}\gamma\in\Sigma x_0.$$

特别，当 Γ 为有限群时，方程(1)的不同的平衡解的数目为

$$|\Gamma|/|\Sigma_{x_0}|,$$

其中| |表示群的阶数.

(ii)设 $x(t)$ 为方程(1)的周期解. 为简单起见，假定周期为 2π. 任取 $\gamma\in\Gamma$，$\gamma x(t)$ 也是方程(1)的周期解且周期为 2π. 应指出的是，在周期解的情形下，需对解的对称性含义予以拓宽. 事实上，由方程(1)的满足初始条件的解的惟一性可推出 $x(t)$ 与 $\gamma x(t)$ 的轨道或者互不相交或者相重. 对于前者，$\gamma x(t)$ 为方程(1)的异于 $x(t)$ 的"新"的周期解. 而对于后一情形，$x(t)$ 与 $\gamma x(t)$ 仅相差一个相移(phase shift)，即

$$x(t)=\gamma x(t-t_0),\ 对某一\ t_0,$$

此时我们说对$(\gamma,\ t_0)$表示周期解 $x(t)$的对称性，它由空间分量 γ 与时间分量 t_0 组成，位于群 $\Gamma\times S^1$ 中，这里 S^1 为圆周群. 因此对周期解需考虑时空对称性，而不只是空间对称性.

由上可见，方程(1)的对称群 Γ，平衡解 x_0 的迷向子群 Σ_{x_0} 等均为一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的子群. 在分歧问题研究中，通常取 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的闭子群作为对称群，称为线性 Lie 群，这里对 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的闭子群作如下说明：由于所有 $n\times n$ 实矩阵所成空间 $\mathrm{gl}(n,\ \mathbb{R})$可等同于$\mathbb{R}^{n^2}$，它包含 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$作为开子集. G 为 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的闭子群是指：(a) G 是 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的子群，(b) G 作为拓扑空间 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的子集是相对闭子集.

13.1.2 紧致 Lie 群与 Haar 积分

我们知道，Lie 群同时具有群结构与微分结构，而且群运算对于其微分结构来说是 C^∞ 可微的. 如果它作为微分流形还是紧致的，则称为紧致 Lie 群. 有一个定理是说每一个紧致 Lie 群拓扑同构于线性 Lie 群，因此对它们不加区分. 下面列出紧致 Lie 群的一些例子.

例 1 令 $O(n)=\{\gamma\in\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})\mid\gamma^{\mathrm{T}}\cdot\gamma=I_n\}$，这里 γ^{T} 表 γ 的转置，I_n 为单位矩阵. 易见 $O(n)$是 $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$的闭子群，叫做 n 维正交群.

$$SO(n)=\{\gamma\in O(n)\mid\det\gamma=1\}$$

叫做特殊正交群或 n 维旋转群. 特别 $SO(2)$中的元素可表示为平面旋转变换

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

因此通过对应 $R_\theta\mapsto\theta$ 可将 $SO(2)$等同于圆周群 S^1. 而 $O(2)$则由 $SO(2)$及平面翻转(flip) κ 所生成，其中

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

例 2 (a) n 阶循环群 Z_n. 将它与生成元为 $R_{2\pi/n}$ 的2×2矩阵群等同,因而 Z_n 可表为

$$Z_n = \{R_{2k\pi/n} \mid k = 0, 1, \cdots, n-1\}.$$

(b) $2n$ 阶二面体群 D_n. 将它等同于生成元为 $R_{2\pi/n}$ 和 κ 的 2×2矩阵群.

从几何上看, D_n 是正 n 边形的对称群,而 Z_n 则是由旋转角为 $2\pi/n$ 的旋转变换生成的旋转群.

(c) 任意一个有限群对于离散拓扑而言构成一个紧致 Lie 群.

例 3 (a) n 维环面 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n个}$ 同构于一个紧致 Lie 群. 事实上,将 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in T^n$ 对应于对角块矩阵

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & 0 \\ & R_{\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{\theta_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

(b) 有限个紧致 Lie 群的卡氏积仍为紧致 Lie 群.

例 4 设 Γ 为紧致 Lie 群. 将 Γ 的包含单位元 e 的连通分支记为 Γ°, 例如 $O(n)^\circ = SO(n)$. 作为连通分支, Γ° 是 Γ 的闭子集. 此外, Γ° 还是 Γ 的正规子群,因此 Γ° 也是紧致 Lie 群.

设 f 为定义在紧致 Lie 群 Γ 上的连续实值函数,利用群 Γ 的左平移 $l_\sigma: \Gamma \to \Gamma$, $l_\sigma(\gamma) = \sigma\gamma$ 可得到一个新的函数 $f \circ l_\sigma: \Gamma \to \mathbb{R}$, $f \circ l_\sigma(\gamma) = f(\sigma\gamma)$.

紧致 Lie 群的一个重要性质是对于其上的连续函数 f, 有一个自然的求平均值的运算,它是一个满足下列条件的映射

$$I: C(\Gamma) \to \mathbb{R},$$

其中 $C(\Gamma)$表示群 Γ 上的连续实值函数所成之集.该条件为

(i) 线性. $I(\lambda f+\mu g)=\lambda I(f)+\mu I(g)$, $f, g \in C(\Gamma), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) 非负性.若 f 在 Γ 上处处非负,则 $I(f) \geqslant 0$.再添加 f 不恒为 0 的条件,则 $I(f)>0$.

(iii) 左不变性. $I(f \circ l_\sigma)=I(f)$, $f \in C(\Gamma)$, $\sigma \in \Gamma$.

将运算 $I: C(\Gamma) \to \mathbb{R}$ 称为 Γ 上的 Haar 积分或不变积分.并用符号

$$\int_\Gamma f\ (\text{或} \int_\Gamma f \mathrm{d}\gamma,\ \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \mathrm{d}\gamma)$$

表示 $I(f)$.如果还满足

(iv) $\int_\Gamma 1=1$,这里积分号中的 1 表示值为 1 的常值函数,

这样的 Haar 积分叫做规范化的 Haar 积分.

可以证明紧致 Lie 群 Γ 上的 Haar 积分具有

(v) 右不变性 $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma \sigma) \mathrm{d}\gamma=\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \mathrm{d}\gamma$, $\forall \sigma \in \Gamma$.

Haar 积分的左不变性和右不变性统称为平移不变性.至于 Haar 积分的存在性与惟一性的证明可参看文献[10]或[13].另外指出的是,在紧致拓扑群(即具有群结构的紧致拓扑空间,并且群运算连续)G 上也存在惟一的求连续函数平均值的运算满足上述性质(i)~(v),把它叫做 G 上的不变积分(参看文献[72]).

例 5 设 Γ 为有限群.显然可以定义

$$I(f)=\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

为 f 的平均值,它满足上述条件(i)~(v).

例 6 圆周群 S^1 上的 Haar 积分为

$$\int_{S^1} f=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta,$$

不难验证它满足(i)～(v).

13.1.3 Lie 群的线性表示

定义 13.1.1 设 Γ 为 Lie 群. V 为有限维实向量空间. 我们说 Γ 线性地作用在 V 上,如果存在连续映射

$$\begin{cases}\Gamma\times V\to V,\\(\gamma,\ v)\mapsto\gamma\cdot v,\end{cases}$$

使得

(i) 对每一 $\gamma\in\Gamma$, 映射 ρ_γ: $V\to V$, $v\mapsto\rho_\gamma(v)=\gamma\cdot v$ 为线性映射,

(ii) 若 $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$,则 $\gamma_2\cdot(\gamma_1\cdot v)=(\gamma_2\gamma_1)\cdot v$.

易见,对每一$\gamma\in\Gamma$,ρ_γ是 V 上的可逆线性变换. 将可逆线性变换 $V\to V$ 所成之群记为 $\mathrm{GL}(V)$,则映射

$$\rho:\ \Gamma\to\mathrm{GL}(V),\ \gamma\mapsto\rho_\gamma$$

叫做 Γ 在 V 上的一个(实)线性表示,简称为表示,用符号(Γ,V)记之. 换句话说,Γ 在 V 上的线性表示是一个映 Γ 到 $\mathrm{GL}(V)$中的同态 ρ: $\Gamma\to\mathrm{GL}(V)$.

例 7 圆周群 S^1 在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上的作用规定为

$$\theta\cdot z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z,\quad \theta\in S^1,\ z\in\mathbb{C},$$

容易验证它满足定义中的条件(i)和(ii). 该作用导出 S^1 的线性表示,ρ_θ 为平面$\mathbb{R}^2$ 上的旋转变换,旋转角为 θ,相应的矩阵为 R_θ,因而 S^1 在$\mathbb{C}$上的作用等同于 $SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用.

作为推广,S^1 在$\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ 上的作用定义如下:对每一整数 k,令

$$\theta\cdot z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}z,\quad \theta\in S^1,\ z\in\mathbb{C}.$$

当 $k=0$ 时,该作用是平凡的,$\theta\cdot z=z$. 当 $k=1$ 时,就是上面所说的情形. 此外,还可以将上式所规定的 $S^1=SO(2)$在$\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ 上的作用扩张为 $O(2)$在$\mathbb{C}$ 上的作用,只需令

$$\kappa \cdot z = \bar{z},\ \kappa \text{ 为翻转}.$$

同一个群可以作用在不同的空间上.

例 8 $GL(n, \mathbb{R})$中的每一个线性 Lie 群 Γ 通过矩阵乘法自然地作用在$\mathbb{R}^n$ 上,还可以依相似性作用于实 $n\times n$ 矩阵组成的空间 $gl(n, \mathbb{R})$上,即令

$$\gamma \cdot A = \gamma A \gamma^{-1},\ \gamma \in \Gamma,\ A \in gl(n, \mathbb{R}).$$

定理 13.1.1 设(Γ, V)是紧致 Lie 群 Γ 在有限维实向量空间V 上的表示,则在 V 上存在一个Γ-不变内积,即

$$\langle \gamma x, \gamma y \rangle_\Gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma \tag{3}$$

对任意 $\gamma \in \Gamma$, x, $y \in V$ 皆成立.

证 基本思路是利用 Haar 积分构造 V 上的一个Γ-不变内积.设$\langle , \rangle$是 V 上的任意内积,定义$\langle , \rangle_\Gamma$ 如下:设 x, $y \in V$,令

$$\langle x, y \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \rho_\gamma x, \rho_\gamma y \rangle \mathrm{d}\gamma.$$

容易验证$\langle , \rangle_\Gamma$ 具有线性、对称性与正定性,因而是 V 上的内积.下证$\langle , \rangle_\Gamma$ 满足(3)式.对任给的 $\sigma \in \Gamma$,有

$$\langle \sigma x, \sigma y \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \langle \gamma(\sigma x), \gamma(\sigma y) \rangle \mathrm{d}\gamma \text{(据平移不变性)}$$

$$= \int_\Gamma \langle \gamma x, \gamma y \rangle \mathrm{d}\gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma,$$

所以$\langle , \rangle_\Gamma$ 是Γ-不变内积.证毕.

等式(3)可改写为

$$\langle \rho_\gamma x, \rho_\gamma y \rangle_\Gamma = \langle x, y \rangle_\Gamma,$$

可见 ρ_γ 作为V 上的线性映射是保范数的,因而是正交变换,于是有

推论 13.1.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在有限维实向量空间 V 上，则在 V 上存在内积，使得对所有 $\gamma\in\Gamma$，ρ_γ 是正交的.

进而可推出：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$中的紧致 Lie 群可以与正交群 $O(n)$ 的闭子群等同.

定义 13.1.2 假设 Lie 群 Γ 同时作用在两个 n 维向量空间 V 与 W 上. 如果(Γ, V)和(Γ, W)之间存在一个和 Γ 的作用可交换的线性同构 $A: V\to W$，即

$$A(\gamma\cdot v)=\gamma\cdot(Av),\ 对任意\ \gamma\in\Gamma,\ v\in V,$$

则称(Γ, V)和(Γ, W)等价(或 Γ-同构)，并说 V 与 W 是 Γ-同构的.

易见，表示 $\rho_1:\Gamma\to\mathrm{GL}(V)$和 $\rho_2:\Gamma\to\mathrm{GL}(W)$等价的充要条件是：存在线性同构 $A: V\to W$，使得

$$\rho_2(\gamma)=A\rho_1(\gamma)A^{-1},\ 对每一\ \gamma\in\Gamma.$$

定义 13.1.3 设 ρ 为 Lie 群 Γ 在向量空间 V 上的表示. 若子空间 $W\subset V$ 在 Γ 的作用下不变，即

$$\Gamma\cdot W=\{\gamma\cdot w\mid\gamma\in\Gamma,\ w\in W\}\subset W,$$

则称 W 为 Γ-不变子空间.

显然，$\{0\}$和 V 本身是 Γ-不变子空间.

定义 13.1.4 (i) Lie 群 Γ 在向量空间 V 上的表示 ρ 叫做不可约的，如果 V 的 Γ-不变子空间仅为$\{0\}$与 V. 换句话说，V 无 Γ-不变非零真子空间.

(ii) V 的子空间 W 为 Γ-不可约的，是指 W 为 V 的 Γ-不变子空间，且 Γ 在 W 上的表示 $\rho|W$ 是不可约的.

在例 7 中曾定义 S^1 在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上的作用为 $\theta\cdot z=\mathrm{e}^{ik\theta}z$. 当 $k\neq0$ 时，它表示旋转角为 $k\theta$ 的旋转变换，因而 S^1 以及 $SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用是不可约的. 进而 $O(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用也是不可约的.

命题 13.1.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在向量空间 V 上，W 为 V 的 Γ-不变子空间，则存在 W 在 V 中的 Γ-不变补子空间

Z,使得

$$V = W \oplus Z.$$

证 据定理 13.1.1,存在 V 上的 Γ-不变内积 $\langle , \rangle_\Gamma$. 现利用这一内积构作 V 的下列子集

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle w, v \rangle_\Gamma = 0 \quad \text{对所有 } w \in W\},$$

显然 $W^\perp \neq \varnothing$,并且容易验证 W 关于这一内积的正交补 $W^\perp$ 也是 Γ-不变的(细节留给读者),令 $Z = W^\perp$,则有 $V = W \oplus Z$. 证毕.

由这一命题可推出每一个紧致 Lie 群的表示可分解为有限个不可约表示的直和.

推论 13.1.2 设紧致 Lie 群 Γ 作用在有限维向量空间 V 上,则存在 Γ-不可约子空间 $V_1, \cdots, V_s$,使得

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s,$$

因此说表示 (Γ, V) 是完全可约的. 简言之,任何紧致 Lie 群的表示 (Γ, V) 是完全可约的.

证 设 V_1 是 $V(\neq \varnothing)$ 的 Γ-不可约子空间,且 $V_1 \neq \varnothing$(可选取 V_1 为非零 Γ-不变子空间中的维数最小者). 据命题 13.1.1,

$$(\Gamma, V) = (\Gamma, V_1) \oplus (\Gamma, V_1^\perp),$$

对 $V_1^\perp$ 重复上述过程,选取一个非零 Γ-不可约子空间 $V_2 \subset V_1^\perp$. 因为 V 是有限维的,这一过程经有限步后必然终止,于是结论得到.

本推论表明,研究紧致 Lie 群的线性表示可归结为不可约线性表示. 下述引理是研讨不可约线性表示的一个基本工具.

引理 13.1.1(Schur) 设 $\rho_1: \Gamma \to GL(V)$ 和 $\rho_2: \Gamma \to GL(W)$ 为两个不可约表示,$A: V \to W$ 为线性变换. 记

$$A \circ \rho_1(\Gamma) = \{A \circ \rho_1(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\},$$

$$\rho_2(\Gamma) \circ A = \{\rho_2(\gamma) \circ A \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

若 $A\circ\rho_1(\Gamma)=\rho_2(\Gamma)\circ A$,则 $A=0$ 或 A 为可逆的.

证 由假设可推知 $\mathrm{Ker}A$ 和 $\mathrm{Im}A$ 分别是 V 和 W 的 Γ-不变子空间(细节由读者补述).再由 ρ_1 与 ρ_2 的不可约性,$\mathrm{Ker}A$ 和 $\mathrm{Im}A$ 只有下列两种可能:

$$\mathrm{Ker}A = V \text{ 且 } \mathrm{Im}A = \{0\},\text{ 即 } A = 0,$$

或者

$$\mathrm{Ker}A = \{0\} \text{ 且 } \mathrm{Im}A = W,\text{ 因而 } A \text{ 是可逆的}.$$

§13.2 Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理

本节介绍紧致 Lie 群的不变量理论中的两个深刻结果:Hilbert-Weyl 定理和 Schwarz 定理.前者为描述不变多项式提供理论基础,后者说明上述结论可以推广到 C^∞ 不变函数芽.

13.2.1 Γ-不变多项式的描述

定义 13.2.1 设 Γ 为(紧致)Lie 群作用在向量空间 V 上. C^∞ 函数 f: $V\to\mathbb{R}$ 叫做 Γ-不变的,如果对任意 $\gamma\in\Gamma$, $v\in V$,有

$$f(\gamma v) = f(v). \tag{1}$$

特别,若 f 为多项式函数满足(1)式,则 f 称为 Γ-不变多项式.

因为 Γ-不变多项式的和与积仍为 Γ-不变的,所以 Γ-不变多项式组成之集 $\mathscr{P}(\Gamma)$是一个环.

例 1 设 $\Gamma=Z_2=\{\pm1\}$非平凡地作用在$\mathbb{R}$上,即 $-1\cdot x=-x$, 那么满足(1)式的 Z_2-不变函数f 恰是偶函数.易见,若 $f\in\mathscr{P}(Z_2)$,即 f 为Z_2-不变多项式,则存在另一多项式 p, 使得

$$f(x) = p(x^2),$$

并且 x^2 是 Z_2-不变的.

例 2 设 S^1 标准地作用在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上,$\theta\cdot z=e^{i\theta}z$.因为 $x=$

$\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$,所以多项式 f 可以写成下列形式:

$$f(z) = \sum a_{jk} z^j \overline{z}^k, \ a_{jk} \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

而 f 为实值函数,$\overline{f}=f$, 故系数 a_{jk} 满足

$$\overline{a}_{jk} = a_{kj}. \tag{3}$$

现假定 f 是 S^1-不变的,$f(e^{i\theta}z)=f(z)$,于是

$$\sum a_{jk} e^{i\theta(j-k)} z^j \overline{z}^k = \sum a_{jk} z^j \overline{z}^k,$$

比较系数,得

$$a_{jk} e^{i\theta(j-k)} = a_{jk}, \text{对所有 } \theta \in S^1,$$

从而当 $j\neq k$ 时,$a_{jk}=0$,f 可写为

$$f(z) = \sum a_{jj} (z\overline{z})^j.$$

再由(3)式知,$a_{jj}\in\mathbb{R}$. 令 p: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $p(x)=\sum a_{jj}x^j$, 则 $f(z)=p(z\overline{z})$. 这说明若 $f\in\mathscr{P}(S^1)$,必存在一元多项式 p, 使得 $f(z)=p(z\overline{z})$,并且 $z\,\overline{z}$ 是 S^1-不变多项式.

例 3 二面体群 D_n 在$\mathbb{C}$上的作用由

$$\theta \cdot z = e^{i\theta} z \ \left(\theta = \frac{2\pi}{n}\right), \ \kappa \cdot z = \overline{z}$$

生成. 类似于例 2,可以证明:对于每一个 D_n-不变多项式$f(z)$,存在多项式 h: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,使得

$$f(z) = h(z\overline{z}, \ z^n + \overline{z}^n),$$

并且 $z\,\overline{z}$, $z^n+\overline{z}^n$ 是D_n-不变多项式. 证明留作练习.

上述 3 个例子启发我们给出下列

定义 13.2.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在向量空间 V 上. 如果在环 $\mathscr{P}(\Gamma)$中存在有限个 $u_1,\cdots,u_s$,使得每一个 Γ-不变多项

式 f 可写为 $u_1,\cdots,u_s$ 的多项式函数，那么这有限个 Γ-不变多项式 $u_1,\cdots,u_s$ 叫做环 $\mathscr{P}(\Gamma)$的 Hilbert 基.

13.2.2 Hilbert-Weyl 定理

上面 3 个例子所得到的结论在一般情形下也是对的，这就是所要介绍的 Hilbert-Weyl 定理.

定理 13.2.1 设 Γ 为紧致 Lie 群，线性地作用在向量空间 V 上，则环 $\mathscr{P}(\Gamma)$存在 Hilbert 基.

本定理的证明需用到 Hilbert 基定理，现陈述如下. 设$\mathbb{R}$ 为交换环，规定

$$R[x] = \{r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0 \mid r_0, r_1, \cdots, r_n \in R\},$$

易见 $R[x]$是交换环，其成员为环 R 上以 x 为不定元的多项式. 归纳地，定义

$$R[x_1,\cdots,x_n] = R[x_1,\cdots,x_{n-1}][x_n],$$

它是 R 上含 n 个不定元 $x_1,\cdots,x_n$ 的多项式组成的交换环.

定理 13.2.2(Hilbert 基定理) 设交换环 R 中的理想均为有限生成的，则环 $R[x]$的每一个理想也是有限生成的.

证明见附录 B.

推论 13.2.1 $\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$的每一理想是有限生成的.

证 用归纳法. 当 $n=0$ 时，实数域$\mathbb{R}$ 的理想只有$\{0\}$及$\mathbb{R}$，它们分别由 0 和 1 生成. 当 $n>0$ 时，记$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_{n-1}]$为 R. 依归纳假设，R 的每一理想是有限生成的. 据定理 13.2.2,

$$\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n] = R[x_n]$$

中的每一理想是有限生成的. 证毕.

Hilbert-Weyl 定理的证明还用到下列

命题 13.2.1 设 $U\subset\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$为非空子集，则存在 U 的有限子集$\{u_1,\cdots,u_s\}$，使得每一 $u\in U$ 可写为

$$u = f_1 u_1 + \cdots + f_s u_s,$$

其中 $f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$.

证 设 $\mathscr{I}$ 为 $\mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 中理想，由 U 所生成. 由推论 13.2.1, $\mathscr{I}$ 是有限生成的，设生成元为 $p_1, \cdots, p_l$. 因为 $\mathscr{I}$ 由 U 生成，每一 p_i 可写成形式

$$p_i = f_{i,1} u_{i,1} + \cdots + f_{i,k_i} u_{i,k_i},$$

其中 $f_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]$, $u_{i,j} \in U (j = 1, \cdots, k_i, \ i = 1, \cdots, l)$. 从而有限集 $\{u_{ij}\}$ 生成 $\mathscr{I}$, 这就是所要求的 U 的有限子集.

定理 13.2.1 的证明 紧致 Lie 群 Γ 作用在向量空间 V 上，设 V 的维数为 n. 将 V 等同于 $\mathbb{R}^n$, 其坐标记为 $x_1, \cdots, x_n$, 此时 $\mathscr{I}(\Gamma)$ 可视为 $x_1 \cdots, x_n$ 的 Γ-不变多项式所成之环. 需证存在有限个 $u_1, \cdots, u_s \in \mathscr{I}(\Gamma)$, 使得每一 $u \in \mathscr{I}(\Gamma)$ 可写为

$$u = f(u_1, \cdots, u_s), \tag{4}$$

其中 $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ 为多项式函数. 我们说只要对 $\mathscr{I}(\Gamma)$ 中的齐次多项式来证明(4)式就行了，事实上，设 $v \in \mathscr{I}(\Gamma)$ 为 m 次 Γ-不变多项式，v 可表为

$$v = v_0 + v_1 + \cdots + v_m,$$

其中 v_j 为 j 次齐次多项式 $(j = 0, 1, \cdots, m)$, 则每一 $v_j \in \mathscr{I}(\Gamma)$. 这是因为 Γ 线性地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上，故对每一 $\gamma \in \Gamma$, $v_j(\gamma x)$ 仍为 j 次齐次, $v(\gamma x) = v(x)$ 仅当 $v_j(\gamma x) = v_j(x)$ 对每一 j.

设 U 为 $\mathscr{I}(\Gamma)$ 中非常值齐次多项式所成之集，据命题 13.2.1, 存在有限子集 $\{u_1, \cdots, u_s\} \subset U$, 使得对每一 $u \in U$, 有

$$u = f_1 u_1 + \cdots + f_s u_s, \ f_1, \cdots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]. \tag{5}$$

下面就齐次多项式 $h \in \mathscr{I}(\Gamma)$ 来验证(4)式，我们对 h 的次数 $\deg h$ 进行归纳证明.

若 $\deg h=0$，则 h 为常值多项式，(4)式显然成立，只需令 $f=h$. 归纳假定对所有 $h\in U$，当 $\deg h\leqslant k$ 时，(4)式成立. 现设 $u\in U$ 的次数为 $k+1$，且 u 表为(5)式. 可以假定 $f_j(j=1,\cdots,s)$ 均为齐次多项式，且 $\deg f_j=\deg u-\deg u_j(j=1,\cdots,s)$. 特别当 $\deg u<\deg u_j$ 时，$f_j=0$.

断言：(5)式中的齐次多项式 f_j 可代之以 Γ-不变齐次多项式 F_j，并且 $\deg F_j=\deg f_j(j=1,\cdots,s)$. 为此，将(5)式的两边在 Γ 上取规范化 Haar 积分，注意到 u，u_j 均为 Γ-不变多项式，因此有

$$u=u_1\int_\Gamma f_1(\gamma x)\mathrm{d}\gamma+\cdots+u_s\int_\Gamma f_s(\gamma x)\mathrm{d}\gamma. \tag{6}$$

令 $F_j(x)=\int_\Gamma f_j(\gamma x)\mathrm{d}\gamma$，由 Haar 积分的平移不变性知，$F_j$ 是 Γ-不变的，又因 Γ 是线性地作用，故 F_j 仍为齐次多项式且 $\deg F_j=\deg f_j$. 将(6)式改写为

$$u=F_1u_1+\cdots+F_su_s,\ F_1,\cdots,F_s\in\mathscr{P}(\Gamma).$$

由于每一 u_j 的次数不小于 1，

$$\deg F_j=\deg f_j\leqslant\deg u-1=k,$$

利用归纳假设，每一 F_j 可写成

$$F_j=g_j(u_1,\cdots,u_s),$$

其中 g_j 为多项式函数. 令

$$f(u_1,\cdots,u_s)=\sum_{j=1}^{s}g_j(u_1,\cdots,u_s)u_j,$$

则 $u=f(u_1,\cdots,u_s)$ 为所要求的.

13.2.3 Schwarz 定理

关于定理 13.2.1，Hilbert 曾经就线性群而非紧致群给出了证明，见文献[32]. Weyl 则在紧致 Lie 群情形下，对该定理提供了清

晰易懂的论证[67]．令人高兴的是这一结果可以推广到 C^{∞} 函数芽．然而在一般的紧致 Lie 群情形下，C^{∞} 芽结果被 Schwarz 所证明（见文献[62]）却相距 Weyl 30 年．在这之前，只是对于某些特殊的紧致 Lie 群才得到相应的结论（例如见文献[24]和[69]）．现陈述 Schwarz 定理如下：

定理 13.2.3 设紧致 Lie 群 Γ 正交地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上．记 Γ-不变 C^{∞} 函数芽 $(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 所成之环为 $\varepsilon_n(\Gamma)$（或 $\varepsilon_x(\Gamma)$，$\varepsilon(\Gamma)$），令 $u_1,\cdots,u_s$ 为环 $\mathscr{P}(\Gamma)$ 的 Hilbert 基．则对任意 $f\in\varepsilon_n(\Gamma)$，存在芽 $h\in\varepsilon_s$，使得

$$f(x) = h(u_1(x),\ \cdots, u_s(x)). \tag{7}$$

注 该定理可采用另外一种方式叙述．定义映射 ρ：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$ 为

$$\rho(x) = (u_1(x),\ \cdots, u_s(x)),$$

称为 Γ 的判别式．令 ρ^*：$\varepsilon_s\to\varepsilon_n(\Gamma)$ 为 $\rho^* h = h\circ\rho$，则 Schwarz 定理断言 ρ^* 是满同态．

下面给出证明思路．设 $f\in\varepsilon_n(\Gamma)$，则 f 在点 $0\in\mathbb{R}^n$ 的 Taylor 级数 jf 是一个 Γ-不变的形式幂级数，这里引用在定理 1.1.2 之后介绍的多重指标记号，将 jf 表为

$$jf(x) = \sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^{\alpha}f(0)\cdot x^{\alpha}.$$

jf 是 Γ-不变的，是指 $jf(\gamma x) = jf(x)\ \forall\,\gamma\in\Gamma,\ x\in\mathbb{R}^n$．首先指出 Hilbert-Weyl 定理可以推广到 Γ-不变的形式幂级数环上，这就是下面的

命题 13.2.2 设 $\varphi(x)$ 是 Γ-不变的 n 元形式幂级数，则存在 s 元形式幂级数 ψ，使得

$$\varphi(x) = \psi(u_1(x),\ \cdots, u_s(x)).$$

证 记 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\varphi_i(x)$，其中 φ_i 为 i 次齐次多项式. 据定理 13.2.1，对每一个 φ_i，存在 s 元多项式 $\psi_i(y_1,\cdots,y_s)$，使得

$$\varphi_i(x) = \psi_i(u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

这里可假定 $u_1,\cdots,u_s$ 都是齐次 Γ-不变多项式. 令 $l=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\deg u_j$. 显然 ψ_i 中非零项的最低次数不小于 $[i/l]$，这里 $[i/l]$ 表示不超过 i/l 的最大整数. 令

$$\psi(y) = \sum_{i=0}^{\infty}\psi_i(y),\ y = (y_1,\cdots,y_s),$$

它是确定好了的形式幂级数. 因为对于任意取定的次数，只有有限个 ψ_i，并且每一个这样的 ψ_i 也只含有限个非零项属于上述和中. 易见 ψ 满足本命题要求. 证毕.

其次我们自然想到从 n 元形式幂级数的讨论回到 n 元 C^∞ 函数芽上去，一个有用的研究工具是下列 Borel 引理(参看文献[9]).

引理 13.2.1 设 $\varphi(x)$是任意一个 n 元实系数形式幂级数，则存在 C^∞ 函数芽 $f(x)\in\varepsilon_n$，使得

$$jf(x) = \varphi(x).$$

这说明 $j:\ \varepsilon_n\to\varepsilon_n/\mathcal{M}_n^\infty=\mathbb{R}[[x_1,\cdots,x_n]]$是满射，其中$\mathbb{R}[[x_1,\cdots,x_n]]$表示 n 元实系数形式幂级数环.

若 $f\in\mathcal{M}_n^\infty$(即 $jf\equiv 0$)，则 f 为平坦函数芽. 下一命题告诉我们，只需对 Γ-不变平坦函数芽来证明 Schwarz 定理.

命题 13.2.3 若每一个 Γ-不变平坦函数芽$g\in\varepsilon_n(\Gamma)$具有形式(7)，即

$$g(x) = h(u_1(x),\ \cdots,\ u_s(x)),\ h\in\varepsilon_s,$$

则 $\varepsilon_n(\Gamma)$中的每一芽必具形式(7).

证 任取 $g\in\varepsilon_n(\Gamma)$，则 jg 是Γ-不变的形式幂级数. 据命题

13.2.2,存在 s 元形式幂级数 ψ,使得

$$jg(x) = \psi(u_1(x), \cdots, u_s(x)).$$

再据引理 13.2.1,存在 $f \in \varepsilon_s$,使得 $jf = \psi$. 于是

$$j(g(x) - f(u_1(x), \cdots, u_s(x))) \equiv 0,$$

这说明 $g(x) - f(u_1(x), \cdots, u_s(x))$是 Γ-不变的平坦芽. 依假设条件,存在 $h \in \varepsilon_s$,使得

$$g(x) - f(u_1(x), \cdots, u_s(x)) = h(u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

从而 g 具有所要求的形式(7). 证毕.

现在问:如何对 Γ-不变的平坦函数芽 $g \in \varepsilon(\Gamma)$来证明它具有形式(7)呢? 这正是证明 Schwarz 定理的困难所在. 考察 Z_2 作用在$\mathbb{R}$上这一特殊情形. 设 g 为平坦芽且满足 $g(x) = g(-x)$. 令 $f(y) = g(\sqrt{|y|})$, 则 $f(x^2) = g(x)$. 显然当 $y \neq 0$ 时, f 是 C^∞ 的. 对于 $y = 0$, 由 g 的平坦性可推得 f 在点 0 是光滑的. 这样一来,在 $\Gamma = Z_2$ 及 $V = \mathbb{R}$ 的情形下,已证明了 Schwarz 定理. 然而对于 Γ 为一般的紧致 Lie 群,实际的证明需用到另外一些知识与技巧. 读者如有兴趣,可参看文献[53]或[62].

§13.3 不变函数芽环上的有限生成模

本节讨论与紧致 Lie 群 Γ 可交换的 C^∞ 映射. 由于本章探讨的是局部分歧问题,因此我们感兴趣的是具有上述性质的 C^∞ 映射芽,特别是非线性映射芽.

13.3.1 Γ-不变函数芽环上的有限生成模

定义 13.3.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,其坐标分别记为 x 和 y. 映射芽 $g: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$ 若满足下列等变性条件

$$g(\gamma x) = \gamma g(x), \text{对所有 } \gamma \in \Gamma,$$

则称为 Γ-等变映射芽.将所有这样的 Γ-等变映射芽所成之集记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$.

引理 13.3.1 设 $f:(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}$ 为 Γ-不变函数芽, $g:(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽,则 $fg:(\mathbb{R}^n, 0)\to\mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽.

证 任取 $\gamma\in\Gamma$, $x\in(\mathbb{R}^n, 0)$,有

$$(fg)(\gamma x)=f(\gamma x)g(\gamma x)=f(x)\cdot\gamma g(x)$$
$$=\gamma(f(x)g(x))=\gamma\cdot(fg)(x),$$

因而

$$(fg)\gamma=\gamma(fg), \text{对所有 } \gamma\in\Gamma,$$

fg 是 Γ-等变的.证毕.

记 $\mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)=\{g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)\mid g \text{ 为 } \Gamma\text{-等变多项式映射芽}\}$.由上述引理知, $\mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)$ 及 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$ 分别为环 $\mathscr{P}(\Gamma)$ 与 $\varepsilon(\Gamma)$ 上的模.现在问:它们是不是有限生成的呢?

定理 13.3.1 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上,则

(i) $\mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)$ 是有限生成的 $\mathscr{P}(\Gamma)$-模,

(ii) $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$ 是有限生成的 $\varepsilon(\Gamma)$-模,

并且若 $\{g_1,\cdots,g_l\}$ 是模 $\mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)$ 的生成元,则它们也是模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$ 的生成元.

证 基本想法是将等变情形转换为不变情形.由于 Γ 是紧致 Lie 群,可以假定 Γ 正交地作用在 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上.将 $\mathbb{R}^m$ 上的 Γ-不变内积记为 $\langle,\rangle$.设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$,定义

$$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, 0)\to\mathbb{R},\ f(x, y)=\langle g(x), y\rangle, \qquad (1)$$

又 Γ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上的作用规定为对角作用,即 $\gamma(x, y)=(\gamma x, \gamma y)$,计算

$$f(\gamma x, \gamma y)=\langle g(\gamma x), \gamma y\rangle=\langle\gamma g(x), \gamma y\rangle$$

$$= \langle g(x),\ y\rangle = f(x,\ y),$$

因此 f 是Γ-不变函数芽.

反过来,通过下列关系:

$$g(x) = (\mathrm{D}_y f(x,\ 0))^t, \tag{2}$$

可由$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\ 0)$上的 Γ-不变函数芽f 得到Γ-等变映射芽 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n;\ m}(\Gamma)$. 事实上,等式

$$f(\gamma x,\ \gamma y) = f(x,\ y)$$

两边对 y 求导并在$y=0$处取值,得

$$\mathrm{D}_y f(\gamma x,\ 0)\cdot\gamma = \mathrm{D}_y f(x,\ 0),$$

取转置,并利用(2)式,得

$$\gamma^{\mathrm{T}} g(\gamma x) = g(x),$$

由于 Γ 正交地作用在$\mathbb{R}^m$ 上,$\gamma^{\mathrm{T}} = \gamma^{-1}$,于是有 $g(\gamma x) = \gamma g(x)$.

记$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$上的 Γ-不变多项式芽所成之环为 $\mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$,它的 Hilbert 基设为 $u_1(x,\ y),\cdots,u_s(x,\ y)$. 又记$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$上的 Γ-不变函数芽全体组成的环为$\varepsilon_{n+m}(\Gamma)$.

(i) 任取 $g \in \mathscr{P}_{n;\ m}(\Gamma)$, 由(1)式可得 $f \in \mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$, 并且容易验证(2)式成立. 据 Hilbert-Weyl 定理,$f \in \mathscr{P}_{n+m}(\Gamma)$可表示为

$$f(x,\ y) = h(u_1(x,\ y),\ \cdots,u_s(x,\ y)),$$

其中 h 为多项式函数. 代入(2)式可求得

$$g(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial u_j} h(u_1(x,\ 0),\ \cdots,u_s(x,\ 0))(\mathrm{D}_y u_j(x,0))^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

又$\frac{\partial}{\partial u_j} h(u_1(x,\ 0),\ \cdots,u_s(x,\ 0))$为$\mathbb{R}^n$ 上的 Γ-不变多项式函数 $(j=1,\ \cdots,s)$,

$$(\mathrm{D}_y u_j(x,0))^{\mathrm{T}},\ j=1,\cdots,s \tag{4}$$

是 Γ-等变多项式映射，(3)式说明(4)式是模$\mathscr{P}_{n;m}(\Gamma)$的一组生成元.

(ii) 任取 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$. 由(1)式得 $f\in\varepsilon_{n+m}(\Gamma)$，并且(2)式成立. 据 Schwarz 定理，

$$f(x,y)=h(u_1(x,y),\cdots,u_s(x,y)),$$

其中 h 为 C^∞ 函数芽. 注意到$\dfrac{\partial}{\partial u_j}h(u_1(x,0),\cdots,u_s(x,0))\in\varepsilon(\Gamma)$，由(3)式说明(4)式是模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$的一组生成元. 证毕.

设 $g:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}^m$ 为 Γ-等变映射芽，则它的导数

$$\mathrm{D}g=S:(\mathbb{R}^n,0)\to \mathrm{gl}(m,\mathbb{R})$$

是一个取值为 $m\times m$ 矩阵的 C^∞ 映射芽，其中 $\mathrm{gl}(m,\mathbb{R})$表实 $m\times m$ 矩阵全体. 由 g 的Γ-等变性知

$$S(\gamma x)=\gamma S(x)\gamma^{-1},\ \forall\gamma\in\Gamma, \tag{5}$$

记

$$\tilde{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)=\{S:(\mathbb{R}^n,0)\to \mathrm{gl}(m,\mathbb{R})\mid S\text{ 满足(5)式}\}.$$

设紧致 Lie 群 Γ 线性地(因而正交地)作用在$\mathbb{R}^n$ 上，并且依相似性(如§13.1 中例 8 所述)作用在 $\mathrm{gl}(m,\mathbb{R})$上，则由定理 13.3.1 得到

推论 13.3.1 $\tilde{\varepsilon}_{n;m}(\Gamma)$是一个有限生成的 $\varepsilon_n(\Gamma)$-模.

例 1 设 $\Gamma=S^1$ 标准地作用在$\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上，$\theta\cdot z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$. 断言：$\boldsymbol{\varepsilon}_{2;2}(S^1)$中的每一 g 可表为

$$g(z)=p(z\bar{z})z+q(z\bar{z})\mathrm{i}z, \tag{6}$$

其中 $p,\ q:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 为 S^1-不变函数芽.

假定 $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为 S^1-等变多项式. 如同§13.2 中例 2 那样，将 g 写为

$$g(z) = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k,\ b_{jk} \in \mathbb{C},$$

由等变性，$g(e^{i\theta}z) = e^{i\theta}g(z)$，因而有

$$\sum b_{jk} z^j \bar{z}^k = \sum b_{jk} e^{(j-k-1)\theta} z^j \bar{z}^k,$$

易见当 $j \neq k+1$ 时，$b_{jk} = 0$，从而

$$g(z) = \sum b_{k+1,k} (z\bar{z})^k z.$$

令 $p(u) = \sum_k \mathrm{Re}(b_{k+1,k}) u^k$，$q(u) = \sum_k \mathrm{Im}(b_{k+1,k}) u^k$，则 g 具有形式(6). 应用定理 13.3.1，z 和 iz 既是 $\mathscr{P}(S^1)$-模 $\mathscr{P}_{2;2}(S^1)$ 的生成元，又是 $\varepsilon(S^1)$-模 $\varepsilon_{2;2}(S^1)$ 的生成元.

例 2 设 $\Gamma = O(2)$ 标准地作用在 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上，则每一个 $O(2)$-等变映射芽 $g \in \varepsilon_{2;2}(O(2))$ 具有形式

$$g(z) = p(z\bar{z})z. \tag{7}$$

事实上，$O(2)$ 由 $SO(2) \cong S^1$ 及翻转 κ 生成，每一 $g \in \varepsilon_{2;2}(O(2))$ 必为 S^1-等变映射芽. 由例 1 知

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz.$$

注意 g 还满足

$$g(\kappa z) = \kappa g(z), \quad \kappa z = \bar{z},$$

故 $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. 而 $\overline{g(\bar{z})} = p(z\bar{z})\cdot z - q(z\bar{z})iz$，因此有 $q(z\bar{z}) = 0$. 应用定理 13.3.1，由(7)式知 z 生成环 $\varepsilon(O(2))$ 上的模 $\varepsilon_{2;2}(O(2))$.

例 3 作为练习，证明每一个 D_n-等变映射芽 $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 具有形式

$$g(z) = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1},$$

其中 $u = z\bar{z}$，$v = z^n + \bar{z}^n$. 据定理 13.3.1. z 和 $\bar{z}^{n-1}$ 是环 $\varepsilon(D_n)$ 上的模 $\varepsilon_{2;2}(D^n)$ 的生成元.

13.3.2 等变预备定理

设紧致 Lie 群 Γ 作用在空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,其坐标分别记为 x 和y.$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^m$ 上的 Γ-不变函数芽环分别记为$\varepsilon_x(\Gamma)$和 $\varepsilon_y(\Gamma)$.

设 φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽,定义 φ^* : $\varepsilon_y(\Gamma)\to\varepsilon_x(\Gamma)$为

$$\varphi^*(f) = f\circ\varphi, \quad \forall f\in\varepsilon_y(\Gamma).$$

$\varphi^*(f)\in\varepsilon_x(\Gamma)$,这是因为对于任意 $\gamma\in\Gamma$,$x\in(\mathbb{R}^n, 0)$有

$$\varphi^*(f)(\gamma x) = f(\varphi(\gamma x)) = f(\gamma\varphi(x)) = f(\varphi(x)) = \varphi^*(f)(x).$$

易见 φ^* 是一个环同态,称为 φ 的拉回.

假设 N 是一个$\varepsilon_x(\Gamma)$-模.借助于 φ^*,将 N 看作是$\varepsilon_y(\Gamma)$-模,其纯量乘法定义如下:对任意 $f\in\varepsilon_y(\Gamma)$, $n\in N$,规定

$$f\cdot n = \varphi^*(f)\cdot n.$$

如果 N 作为$\varepsilon_x(\Gamma)$-模是有限生成的,问 N 作为$\varepsilon_y(\Gamma)$-模是否有限生成呢?

定理 13.3.2(Malgrange 预备定理的等变形式) 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上,φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽.假定 N 是有限生成的$\varepsilon_x(\Gamma)$-模.借助于环同态 φ^*,N 作为 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模是有限生成的当且仅当

$$\dim_{\mathbb{R}} N/\mathcal{M}_y(\Gamma)\cdot N < \infty, \tag{8}$$

这里 $\mathcal{M}_y(\Gamma)=\{f\in\varepsilon_y(\Gamma)\mid f(0)=0\}$是环 $\varepsilon_y(\Gamma)$的极大理想.

证 必要性.设 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模 N 的生成元为 $n_1,\cdots,n_k$.任取 $n\in N$,则存在 Γ-不变函数芽$f_1,\cdots,f_k\in\varepsilon_y(\Gamma)$,使得

$$n = f_1 n_1 + \cdots + f_k n_k.$$

依 Taylor 定理,$f_j(y)=c_j+\tilde{f}_j(y)$, $c_j=f_j(0)\in\mathbb{R}$, $\tilde{f}_j\in\mathcal{M}_y(\Gamma)$

$(j=1, \cdots, k)$,因此

$$h = c_1 n_1 + \cdots + c_k n_k + \tilde{f}_1 n_1 + \cdots + \tilde{f}_k n_k,$$

由此可推出 $N=\mathbb{R}\{n_1, \cdots, n_k\}+\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N$,并且

$$\dim_{\mathbb{R}} N/\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N \leqslant k < \infty.$$

充分性.设 $u_1, \cdots, u_s$ 及 $v_1, \cdots, v_t$ 分别为 $\varepsilon_x(\Gamma)$ 和 $\varepsilon_y(\Gamma)$ 的 Hilbert 基,并假定这些生成元都是齐次多项式.令

$$\rho: (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^s, 0),\ \rho(x) = (u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

$$\sigma: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0),\ \sigma(y) = (v_1(y), \cdots, v_t(y)),$$

Schwarz 定理告诉我们,$\rho^*: \varepsilon_s \to \varepsilon_x(\Gamma)$, $\sigma^*: \varepsilon_t \to \varepsilon_y(\Gamma)$ 均为满同态.此外,对每一 $j=1, \cdots, t$, $v_j \circ \varphi: (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}$ 是 Γ-不变函数芽.由 Schwarz 定理,存在 $\psi_j \in \varepsilon_s$,使得

$$\psi_j \circ \rho = v_j \circ \varphi.$$

令 $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_t)$,则 $\psi: (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$ 满足 $\psi \circ \rho = \sigma \circ \varphi$,于是有

$$\rho^* \circ \psi^* = \varphi^* \circ \sigma^*. \tag{9}$$

依条件,N 是有限生成的 $\varepsilon_x(\Gamma)$-模,又 $\rho^*: \varepsilon_s \to \varepsilon_x(\Gamma)$ 为满同态,故 N 作为 ε_s-模也是有限生成的.另外,借助于 φ^*,N 是 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模.而 $\sigma^*: \varepsilon_t \to \varepsilon_y(\Gamma)$ 是满同态,因此要证 N 为有限生成的 $\varepsilon_y(\Gamma)$-模,只要证明 N 是有限生成的 ε_t-模就行了.

其次,(9)式说明 N 作为环 ε_t 上的模,其模结构是由 N 在环 ε_s 上的模结构通过 ψ^* 得到的.现 N 作为 ε_s-模是有限生成的,应用 Malgrange 预备定理,只要能证明

$$\dim_{\mathbb{R}} N/\psi^*(\mathscr{M}_t)\cdot N < \infty, \tag{10}$$

则 N 便是有限生成的 ε_t-模.依上述分析,余下证明(10)式成立.

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} N/\psi^*(\mathscr{M}_t)\cdot N &= \dim_{\mathbb{R}} N/\rho^*(\psi^*(\mathscr{M}_t))\cdot N\\ &= \dim_{\mathbb{R}} N/\varphi^*(\sigma^*(\mathscr{M}_t))\cdot N\\ &= \dim_{\mathbb{R}} N/\varphi^*(\mathscr{M}_y(\Gamma))\cdot N\\ &= \dim_{\mathbb{R}} N/\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N,\end{aligned}$$

故由(8)式得(10)式.

推论 13.3.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 与$\mathbb{R}^m$ 上，φ: $(\mathbb{R}^n, 0)\to(\mathbb{R}^m, 0)$为 Γ-等变映射芽. 假设 N 是有限生成的 $\varepsilon_x(\Gamma)$-模，且 $n_1,\cdots,n_k\in N$. 那么 N 作为$\varepsilon_y(\Gamma)$-模由 $n_1,\cdots,n_k$ 生成当且仅当

$$N=\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_k\}+\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N. \tag{11}$$

证 ⇒在定理 13.3.2 的必要性证明中已证.

⇐ 令 N 的$\varepsilon_y(\Gamma)$-子模$\widetilde{N}=\varepsilon_y(\Gamma)\cdot\{n_1,\cdots,n_k\}$，需证 $N=\widetilde{N}$，显然只要证 $N\subset\widetilde{N}$. 条件(11)说明 $\dim_{\mathbb{R}} N/\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N<\infty$，据定理 13.3.2，$N$ 是有限生成的$\varepsilon_y(\Gamma)$-模. 并且由(11)式自然有

$$N\subset\widetilde{N}+\mathscr{M}_y(\Gamma)\cdot N,$$

再据 Nakayama 引理，$N\subset\widetilde{N}$. 证毕.

考虑到后面的需要，我们给出另一推论. 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 上，令 π: $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l$, $\pi(x, \lambda, \delta)=\delta$ 为投影，又设 Γ 在$\mathbb{R}^l$ 上的作用是平凡的，易见 π 是一个 Γ-等变映射.

推论 13.3.3 设 N 是环$\varepsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$上的有限生成模，$n_1,\cdots,n_t\in N$. 借助于 π^*，N 可视为ε_δ-模，那么下列断言是等价的：

(a) $N=\varepsilon_\delta\{n_1,\cdots,n_t\}$,

(b) $N=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle\cdot N+\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}$，其中$\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle$表示 ε_δ 中由$\delta_1,\cdots,\delta_l$ 生成的理想，即 $\mathscr{M}_\delta$,

(c) 令 $N_0=N/\mathscr{M}_\delta\cdot N$，则 $N_0=\mathbb{R}\{\tilde{n}_1,\cdots,\tilde{n}_t\}$，其中 $\tilde{n}_j$ 为 n_j

在N_0中的投影($j=1,\cdots,t$).

证 (b)⇔(c)显然.

(a)⇔(b) 因Γ在$\mathbb{R}^l$上的作用是平凡的,故$\mathscr{M}_\delta(\Gamma)=\mathscr{M}_\delta=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle$.现据推论13.3.2,

$$N=\varepsilon_\delta\{n_1,\cdots,n_t\}\Leftrightarrow N=\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}+\mathscr{M}_\delta(\Gamma)\cdot N$$
$$\Leftrightarrow N=\langle\delta_1,\cdots,\delta_l\rangle\cdot N+\mathbb{R}\{n_1,\cdots,n_t\}.$$

§13.4 等变分歧问题

本节假定Γ为紧致Lie群,它线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^m$上,这里$n\geqslant m$.记$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^m$的坐标分别为x和y.

13.4.1 等变分歧问题的Γ-等价

设C^∞映射芽$g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k,(0,0))\to\mathbb{R}^m$满足下列等变性条件

$$g(\gamma x,\lambda)=\gamma g(x,\lambda),\ \forall\gamma\in\Gamma,\ x\in(\mathbb{R}^n,0),\ \lambda\in(\mathbb{R}^k,0),\tag{1}$$

将所有这样的Γ-等变映射芽组成之集记为$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$.特别,当$m=n$时,简记为$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$或$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

定义13.4.1 映射芽$g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$叫做以$\Gamma$为对称群的$k$参数等变分歧问题,如果它满足

$$g(0,0)=0,\ (\mathrm{D}_xg)_{(0,0)}=0,\tag{2}$$

这里D_xg表示g关于x的导数,可看作由g关于x的一阶偏导数组成的$m\times n$ Jacobi矩阵.$x=(x_1,\cdots,x_n)$叫做状态变量,$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$称为分歧参数.

注 对于上述条件(2),作如下解释.取$m=n$,考虑含有参数$\lambda\in\mathbb{R}^k$的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x, \lambda) \tag{3}$$

的对称性，其中 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射. 如同 §13.1 那样，设 γ 是一个可逆 $n \times n$ 矩阵满足条件(1)，则 γ 反映了方程(3)的对称性，并且满足条件(1)的所有 γ 组成一个群，叫做方程(3)的对称群. $x = 0$, $\lambda = 0$ 为方程(3)的平衡解自然 $g(0, 0) = 0$. 若 $(\mathrm{D}_x g)_{(0,0)}$ 的秩小于 n 但不等于 0，可以应用带对称性的 Liapunov-Schmidt 约化(参看文献[30])，使得约化后的 g' 的 Jacobi 矩阵为零矩阵，并且约化方程保留原方程的对称性.

设 l 为非负整数. $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的子空间 $\mathscr{M}^l_{n,k;m}(\Gamma)$ 定义为满足下列条件的 Γ-等变映射芽所成的空间，这样的等变芽关于 x 和 λ 的导数在原点的值，当阶数小于 l 时全为零. 用式子表示，

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^l_{n,k;m}(\Gamma) &= \{g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \mid (\mathrm{D}^\alpha g)_{(0,0)} = 0, \mid \alpha \mid < l\} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \cap \mathscr{M}^l_{x,\lambda} \cdot \varepsilon^{\times m}_{x,\lambda},\end{aligned}$$

特别，记 $\mathscr{M}^1_{n,k;m}(\Gamma) = \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$.

设取值为 $m \times m$ 矩阵的映射芽 $S: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \to \mathrm{gl}(m, \mathbb{R})$ 满足条件

$$S(\gamma x, \lambda) = \gamma S(x, \lambda)\gamma^{-1}, \text{对所有 } \gamma \in \Gamma. \tag{4}$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = \{S: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \\ \to \mathrm{gl}(m, \mathbb{R}) \mid S \text{ 满足(4) 式}\},\end{aligned}$$

特别当 $m = n$ 时，$\tilde{\varepsilon}_{n,k;n}(\Gamma)$ 简记为 $\tilde{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$. 据定理 **13.3.1** 和推论 13.3.1，$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 和 $\tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 是 Γ-不变函数芽环 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$ 上的有限生成模，其中 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma) = \{\alpha: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, (0, 0)) \to \mathbb{R} \mid \alpha(\gamma x, \lambda) = \alpha(x, \lambda), \ \forall \gamma \in \Gamma\}$.

此外，将 $\mathbb{R}^n$ 上的所有 Γ-等变线性映射芽组成的向量空间记

为 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)$、$\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)\cap GL(n,\mathbb{R})$中包含单位元的连通分支记为 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0$，当 Γ 为平凡群(即 $\Gamma=1$)时，简记为 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)^0$.

定义 13.4.2 紧致 Lie 群 Γ 在$\mathbb{R}^n$ 上的表示叫做绝对不可约的，如果$\mathbb{R}^n$ 上的线性映射与 Γ 可交换，则它必为恒等映射 I_n 的数量倍，即

$$\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}\{I_n\},$$

此时 $\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0=\{cI_n \mid c>0\}$. 而且不难证明：紧致 Lie 群 Γ 在$\mathbb{R}^n$ 上的表示如果是绝对不可约的，则必为不可约的(留作练习). 例如 $O(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的标准作用是绝对不可约的，$SO(2)$在$\mathbb{R}^2$ 上的标准作用是不可约的但非绝对不可约.

有了上述准备，现在来建立两个 Γ-等变分歧问题等价的概念.

定义 13.4.3 设 $g,\ h\in\mathscr{M}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$是两个等变分歧问题. 如果存在$(S,\ X,\ \Lambda)\in\tilde{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)\times\mathscr{M}_{n,\,k}(\Gamma)\times\mathscr{M}_k\cdot\varepsilon_k^{\times k}$，使得

$$h(x,\ \lambda) = S(x,\ \lambda)g(X(x,\ \lambda),\ \Lambda(\lambda)), \tag{5}$$

并且

$$S(0,\ 0)\in\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0,\ (D_xX)_{(0,\,0)}\in\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0, (D\Lambda)_0\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0, \tag{6}$$

则说 h 与 g 是Γ-等价的，记为 $h\sim_\Gamma g$.

如果还有 $\Lambda(\lambda)\equiv\lambda$，那么 h 与 g 是强Γ-等价的，记为 $h\overset{s}{\sim}_\Gamma g$.

令集

$$\mathscr{D}(\Gamma) = \{(S,\ X,\ \Lambda)\in\tilde{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)\times\mathscr{M}_{n,\,k}(\Gamma)\times\mathscr{M}_k\cdot\varepsilon_k^{\times k}\mid S(0,\ 0)$$
$$\in\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0,\ (D_xX)_{(0,\,0)}\in\mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0,\ (D\Lambda)_0\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0\},$$

规定乘法运算如下：记 $\varphi_i=(X_i,\ \Lambda_i)(i=1,\ 2)$，

$$(S_2,\ \varphi_2)\circ(S_1,\ \varphi_1) = (S_2\cdot(S_1\circ\varphi_2),\ \varphi_1\circ\varphi_2),$$

其中

$$S_2 \cdot (S_1 \circ \varphi_2)(x, \lambda) = S_2(x, \lambda) \cdot S_1(\varphi_2(x, \lambda)),$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2(x, \lambda) = (X_1 \circ \varphi_2(x, \lambda), \Lambda_1 \circ \Lambda_2(\lambda)),$$

易证 $\mathscr{D}(\Gamma)$在上述乘法运算下作成一个群,称为 Γ-等价群,并且 $\mathscr{D}(\Gamma)$在$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$上的作用正好诱导出上面的 Γ-等价关系. 令

$$\mathscr{D}^s(\Gamma) = \{(S, X, \Lambda) \in \mathscr{D}(\Gamma) \mid \Lambda(\lambda) \equiv \lambda\},$$

则 $\mathscr{D}^s(\Gamma)$是 $\mathscr{D}(\Gamma)$的正规子群,称为强 Γ-等价群.

例 1 设 $g: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, (0, 0))\to\mathbb{R}$ 为 Z_2-等变映射芽,则

$$g(-x, \lambda) = -g(x, \lambda),$$

g 关于 x 为奇函数,可写成 $g(x, \lambda)=a(x^2, \lambda)\cdot x$,因而

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(Z_2) = \varepsilon_{u,\lambda}\{x\},$$

其中 $u=x^2$,$\varepsilon_{u,\lambda}$表示变量 u 和 λ 的 C^∞ 函数芽所成的环.

$g, h\in\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(Z_2)$是 Z_2-等价的,是指存在 C^∞ 函数芽 $S(x, \lambda)$, $X(x, \lambda)$及 $\Lambda(\lambda)$,使得

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)),$$

并且 X 是 x 的奇函数,S 是 x 的偶函数,又 $X(0, 0)=0$, $\Lambda(0)=0$, $S(0, 0)>0$, $X'_x(0, 0)>0$ 及 $\Lambda'(0)>0$.

例 2 考虑 $Z_2\oplus Z_2$ 在$\mathbb{R}^2$ 上的作用. 群 $Z_2\oplus Z_2$ 有 4 个元素 (ε,δ),这里 $\varepsilon=\pm 1$, $\delta=\pm 1$. 群元素(ε,δ)在点$(x, y)\in\mathbb{R}^2$ 的作用定义为$(\varepsilon, \delta)\cdot(x, y)=(\varepsilon x, \delta y)$. 可以把$(\varepsilon,\delta)$在$\mathbb{R}^2$ 上的作用想象为线性映射,对应的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

现设 $g: (\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, (0, 0))\to(\mathbb{R}^2, 0)$为 $Z_2\oplus Z_2$-等变映射芽,则有

$$g((\varepsilon, \delta)\cdot(x, y), \lambda) = (\varepsilon, \delta)g(x, y, \lambda). \qquad (7)$$

断言:存在光滑函数芽 $p(u, v, \lambda)$和 $q(u, v, \lambda)$,使得

$$g(x, y, \lambda) = (p(x^2, y^2, \lambda)x, q(x^2, y^2, \lambda)y), \qquad (8)$$

且

$$p(0, 0, 0) = 0, \quad q(0, 0, 0) = 0.$$

事实上,将 g 写为

$$g(x, y, \lambda) = (a(x, y, \lambda), b(x, y, \lambda)),$$

由(7)式可推得

$$a(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = \varepsilon a(x, y, \lambda), b(\varepsilon x, \delta y, \lambda) = \delta b(x, y, \lambda).$$

取 $\varepsilon=-1, \delta=1$, 上式说明 a 是 x 的奇函数,b 是 x 的偶函数;取 $\varepsilon=1, \delta=-1$,则 a 为 y 的偶函数,b 为 y 的奇函数.据 Taylor 定理,

$$a(x, y, \lambda) = \tilde{a}(x, y, \lambda)x, b(x, y, \lambda) = \tilde{b}(x, y, \lambda)y,$$

其中 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ 同时是 x 和 y 的偶函数,因而 g 具有形式(8).再有,由 $(\mathrm{D}_x g)_{(0,0)}=0$ 知,g 的线性项$((p(0, 0, 0)x, q(0, 0, 0)y))$为 0,于是 $p(0, 0, 0)=q(0, 0, 0)=0$.

假设 $g, h: (\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}, (0, 0))\to\mathbb{R}^2$ 是 $Z_2\oplus Z_2$-等变分歧问题.如果 g 和 h 是 $Z_2\oplus Z_2$-等价的,那么存在可逆的 2×2 矩阵 $S(x, y, \lambda)$光滑地依赖于 x, y, λ,以及局部微分同胚 $\Phi(x, y, \lambda)=(X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$,使得

(i) $g(x, y, \lambda)=S(x, y, \lambda)h(X(x, y, \lambda), \Lambda(\lambda))$,

(ii) $X(0, 0, 0)=(0, 0)$, $\Lambda(0)=0$, $\Lambda'(0)>0$,

(iii) $X(\varepsilon x, \delta y, \lambda)=(\varepsilon, \delta)X(x, y, \lambda)$,

(iv) $S(\varepsilon x, \delta y, \lambda)\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \delta\end{bmatrix}S(x, y, \lambda)$.

由(iii)知,X 是$Z_2\oplus Z_2$-等变的,再由上述断言,便有

(iii)′ $X(x, y, \lambda)=(a(x^2, y^2, \lambda)x, b(x^2, y^2, \lambda)y)$.
记 $z=(x, y)$,则

$$(\mathrm{D}_z X)_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} a(0,0,0) & 0 \\ 0 & b(0,0,0) \end{bmatrix}$$ 为对角矩阵.

另外,将 S 表示为

$$S(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} S_1(x, y, \lambda) & S_2(x, y, \lambda) \\ S_3(x, y, \lambda) & S_4(x, y, \lambda) \end{bmatrix},$$

由(iv)并通过计算可知,S_1 和 S_4 均为 x 和 y 的偶函数,S_2 和 S_3 关于 x 和 y 为奇函数,因此 $S(x, y, \lambda)$ 可写为

$$\text{(iv)}' \quad S(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} c_1(x^2, y^2, \lambda) & c_2(x^2, y^2, \lambda)xy \\ c_3(x^2, y^2, \lambda)xy & c_4(x^2, y^2, \lambda) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

特别

$$S(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} c_1(0,0,0) & 0 \\ 0 & c_4(0,0,0) \end{bmatrix}$$

也是对角矩阵. $Z_2 \oplus Z_2$-等价还要求

(v) $a(0, 0, 0)>0$, $b(0, 0, 0)>0$, $c_1(0, 0, 0)>0$, $c_4(0, 0, 0)>0$.

于是 g 和 h 是 $Z_2 \oplus Z_2$-等价,如果存在上述 S 和 $\Phi=(X, \Lambda)$,满足(i),(ii),(iii)′,(iv)′及(v).

以上两例可见,对称性对等变映射芽给予了一定限制. 而定义 13.4.3 中条件(6)基于对分歧问题的解的稳定性考虑(参看文献[31]).

13.4.2 等变轨道切空间

我们将导出(5)式的无穷小形式,定义 $g \in \varepsilon_{n,k;m}(\Gamma)$ 的等变

轨道切空间，它是分歧理论中的一个基本概念．在应用奇点理论方法研究以紧致 Lie 群为对称群的等变分歧问题的识别以及开折理论中，它是一个不可缺少的工具．

为便于理解等变轨道切空间的概念，我们从几何直观入手．设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$．在 Γ-等价群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 中取一条经过单位元 1 的光滑曲线 $\{\delta_t\}$，这里 $\delta_t=(S_t, X_t, \Lambda_t)\in\mathscr{D}(\Gamma)$，$\delta_0=(S_0, X_0, \Lambda_0)=1$，并且 S_0 为 $m\times m$ 单位矩阵，$X_0(x,\lambda)=x$，$\Lambda_0(\lambda)=\lambda$．将 δ_t 作用于 g 得 $\delta_t g$，

$$\delta_t g(x,\lambda)=S(x,\lambda,t)g(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t)),$$

因而 $\{\delta_t g\}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 中一条经过 g 的光滑曲线，把 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}$ 看作是在 g 处的一个切向量．

定义 13.4.4 设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$．轨道 $\mathscr{D}(\Gamma)\cdot g$ 在 g 处的切空间 $T(g,\mathscr{D}(\Gamma))$ 定义为

$$T(g,\mathscr{D}(\Gamma))=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}\,|\,\delta_t\in\mathscr{D}(\Gamma),\ \delta_0=1\right\},$$

而将

$$T(g,\mathscr{D}^s(\Gamma))=\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_t g)|_{t=0}\,|\,\delta_t\in\mathscr{D}^s(\Gamma),\delta_0=1\right\}$$

叫做在 g 处的 Γ-等变限制切空间．并记 $T(g,\mathscr{D}^s(\Gamma))=RT(g,\Gamma)$，$T(g,\mathscr{D}(\Gamma))=T(g,\Gamma)$．

经计算，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(x,\lambda,t)g(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t)))|_{t=0}\\&=\dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda)+(\mathrm{D}_x g)\dot{X}(x,\lambda,0)\\&\quad+(\mathrm{D}_\lambda g)\dot{\Lambda}(\lambda,0)=\dot{S}_0(x,\lambda)g(x,\lambda)\end{aligned}$$

$$+ (\mathrm{D}_x g)\dot{X}_0(x, \lambda) + (\mathrm{D}_\lambda g)\dot{\Lambda}_0(\lambda),$$

其中 $\dot{S},\dot{X},\dot{\Lambda}$分别表示 S,X,Λ 对 t 的导数. 因为 $X(x, \lambda, t)$和 $S(x, \lambda, t)$分别满足等变性条件(1)和(4),所以 $\dot{X}(x, \lambda, 0)$, $\dot{S}(x, \lambda, 0)$也分别满足(1)和(4). 又 $X(0, 0, t)\equiv 0, \Lambda(0, t)\equiv 0$,所以 $\dot{S}_0\in\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$, $\dot{X}_0\in\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)$, $\dot{\Lambda}_0\in\mathscr{M}_k\cdot\varepsilon_k^{\times k}$. 由此可知

$$\begin{aligned} T(g, \Gamma) &= \{Sg + (\mathrm{D}_x g)X \mid (S, X)\in\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)\times\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)\} \\ &\quad + \{(\mathrm{D}_\lambda g)\cdot\Lambda \mid \Lambda\in\mathscr{M}_k\cdot\varepsilon_k^{\times k}\} \\ &= (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)) + \tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)\cdot g + (\mathrm{D}_\lambda g)(\mathscr{M}_g\cdot\varepsilon_k^{\times k}), \end{aligned} \tag{10}$$

并且

$$RT(g, \Gamma) = (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)) + \tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)\cdot g. \tag{11}$$

特别当 $m=n$, $k=1$ 时,

$$T(g, \Gamma) = RT(g, \Gamma) + \varepsilon_\lambda\{\lambda g_\lambda\}, \tag{12}$$

$$RT(g, \Gamma) = (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)) + \tilde{\varepsilon}_{n, k}(\Gamma)\cdot g.$$

$RT(g, \Gamma)$是 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$-模,$T(g, \Gamma)$一般来说不是,但它是 ε_λ-模. 进而有

命题 13.4.1 $RT(g, \Gamma)$是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$的有限生成的 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$-子模. 设 $\tilde{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$的生成元为 $S_1, \cdots, S_t$, 又 $X_1, \cdots, X_s$ 生成$\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)$,则

$$S_1 g, \cdots, S_t g;\ (\mathrm{D}_x g)(X_1), \cdots, (\mathrm{D}_x g)(X_s) \tag{13}$$

生成 $RT(g, \Gamma)$.

证明留作练习.

定义 13.4.5 设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k; m}(\Gamma)$. 若

$$\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)/T(g,\,\Gamma) < \infty,$$

称分歧问题 g 具有有限 Γ-余维.

若 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，根据文献[14]中定理10.2，g 是有限决定的，因而存在正整数 l，使得对所有 $p \in \mathcal{M}^l_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$，有

$$g + p \in \mathcal{D}(\Gamma)\cdot g,$$

这说明 $p \in \mathcal{M}^l_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 是"高阶项"，在寻求 g 的标准形式时可以略去. $\mathcal{D}(\Gamma)$ 一般来说不是 Lie 群，然而 $\mathcal{D}(\Gamma)$ 在 $\mathcal{M}_{n,\,k;\,m}(\Gamma)$ 上的作用诱导出它在 Γ-等变映射芽的 l - 导网所成空间 $J^l(\mathcal{M}_{n,\,k;\,m}(\Gamma))$ 上的作用，这一作用可以看作是一仿射代数群在仿射空间上的代数群作用，参看文献[7]和[11].

例 3　继续例 2 的讨论，计算切空间. 记 $z = (x,\ y)$. 易见不变函数芽环 $\varepsilon_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ 的 Hilbert 基为 $u = x^2$，$v = y^2$ 和 λ. 由例 2 中(8)式知，每一 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{2,\,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 可惟一地表示为

$$g = (p x,\ q y) = p\cdot(x,\ 0) + q\cdot(0,\ y),\ p, q \in \mathcal{M}_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2), \tag{14}$$

这说明 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2) = \mathcal{M}_{2,\,1}(Z_2 \oplus Z_2)$，并且 $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 作为 $\varepsilon_{z,\,\lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$-模，其生成元为 $g_1 = (x,\ 0)$ 和 $g_2 = (0,\ y)$. 利用不变坐标函数，将(14)式简写为

$$g = [p,\ q].$$

另外，由例 2 中(9)式知，$\tilde{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 的生成元为

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix},\ S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

现在求 $RT(g,\ Z_2 \oplus Z_2)$ 的生成元，据命题 13.4.1，有下列 6 个，用不变坐标形式表示为

$$[p,\ 0],\ [0,\ q],\ [0,\ up],\ [vq,\ 0],\ [up_u,\ uq_u],\ [vp_v,\ vq_v], \tag{15}$$

事实上，$S_1 g=[p,\ 0]$，$S_2 g=[vq,\ 0]$，$S_3 g=[0,\ up]$，$S_4 g=[0,\ q]$. 又

$$D_z g=\begin{bmatrix} p+xp_u\cdot u_x & xp_v\cdot v_y \\ yq_u\cdot u_x & q+yq_v\cdot v_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p+2up_u & 2xyp_v \\ 2xyq_u & q+2vp_v \end{bmatrix},$$

$$(D_z g)g_1=\begin{bmatrix} xp+2xup_u \\ 2yuq_u \end{bmatrix},\ (D_z g)g_2=\begin{bmatrix} 2xvp_v \\ yq+2yvq_v \end{bmatrix},$$

用不变坐标表示，分别为

$$(D_z g)g_1=[p,\ 0]+2[up_u,\ uq_u],$$

$$(D_z g)g_2=[0,\ q]+2[vp_v,\ vq_v],$$

所以 $RT(g,\ Z_2\oplus Z_2)$ 的生成元为(15)式，又据公式(12)，

$$T(g,\ Z_2\oplus Z_2)=RT(g,\ Z_2\oplus Z_2)+\varepsilon_\lambda\{[\lambda p_\lambda,\ \lambda q_\lambda]\}.$$

例 4 设 $O(2)$ 标准地作用在 $\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$ 上. 由 §13.3 中例 2 知，不变函数芽环 $\varepsilon_z(O(2))$ 的 Hilbert 基为 $u=z\bar{z}$，每一 $O(2)$-等变映射芽 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(O(2))$（或记为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$）添可表为

$$g(z,\ \lambda)=p(u,\ \lambda)z,\ p\in\varepsilon_{z,\lambda}(O(2)),$$

因而 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$ 的生成元为 $g_1=z$. 用不变坐标表示，$g=[p]$. 另外，$\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))=\mathcal{M}_{z,\lambda}(O(2))$. 为计算切空间，先求 $\tilde{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$，简记为 $\tilde{\varepsilon}(O(2))$.

不难看出，线性映射 $S(z,\ \lambda)\in\tilde{\varepsilon}(O(2))$ 具有形式

$$S(z,\ \lambda)w=\alpha(z,\ \lambda)w+\beta(z,\ \lambda)\overline{w}.$$

依定理 13.3.1，可限制 $S(z,\ \lambda)$（因而 $\alpha(z,\ \lambda)$，$\beta(z,\ \lambda)$）为 z 的多项式映射，因此可假定

$$S(z,\ \lambda)w=\sum\alpha_{jk}(\lambda)z^j\bar{z}^k w+\sum\beta_{jk}(\lambda)z^j\bar{z}^k\overline{w}. \quad (16)$$

$O(2)$-等变性条件指的是

(a) $S(e^{i\theta}z, \lambda)e^{i\theta}w = e^{i\theta}S(z, \lambda)w$,

(b) $S(\kappa z, \lambda)\kappa w = \kappa S(z, \lambda)w$，即$\overline{S(\bar{z}, \lambda)\overline{w}} = S(z, \lambda)w$.

由(b)可推出(16)式中的系数 α_{jk}，β_{jk}必为实的.又(a)可写为

$$S(z, \lambda)w = \sum \alpha_{jk}(\lambda)e^{(j-k)i\theta}z^j\bar{z}^k w + \sum \beta_{jk}(\lambda)e^{(j-k-2)i\theta}z^j\bar{z}^k\overline{w}, \tag{17}$$

比较(16)与(17)式的对应项,得出

$$\alpha_{jk}(\lambda) = 0, \ j \neq k, \ \beta_{jk}(\lambda) = 0, \ j \neq k+2,$$

于是

$$S(z, \lambda)w = \sum \alpha_{kk}(\lambda)(z\bar{z})^k w + \sum \beta_{k+2,k}(\lambda)(z\bar{z})^k z^2\overline{w},$$

又$\sum_k \alpha_{kk}(\lambda)(z\bar{z})^k$，$\sum_k \beta_{k+2,k}(\lambda)(z\bar{z})^k \in \varepsilon_{z,\lambda}(O(2))$,故

$$S_1(z, \lambda)w = w \quad 及 \quad S_2(z, \lambda)w = z^2\overline{w}$$

生成 $\varepsilon_{z,\lambda}(O(2))$上的模 $\tilde{\varepsilon}(O(2))$.

有了上述准备,现求 $RT(g, O(2))$的生成元.形如 Sg 的生成元为$S_1g = g$ 和$S_2g = z^2\bar{g} = z^2\overline{pz} = zu\bar{p} = zup$，于是 $S_1g = [p]$为生成元($S_2g = [up]$是多余的).

又因为 $\varepsilon_{z,\lambda}(O(2)) = \mathcal{M}_{z,\lambda}(O(2))$且生成元为 z，故只考虑$(D_zg)(z)$,

$$\begin{aligned}(D_zg)z &= g_z \cdot z + g_{\bar{z}} \cdot \bar{z} = (p + p_u \cdot \bar{z}z)z + p_u \cdot z^2 \cdot \bar{z} \\ &= (p + 2up_u)z = [p + 2up_u],\end{aligned}$$

于是 $RT(g, O(2))$的生成元为$[p]$和$[up_u]$,并且

$$T(g, O(2)) = RT(g, O(2)) + \varepsilon_\lambda\{[\lambda p_\lambda]\}.$$

§ 13.5 等变分歧问题的识别

在分歧理论中感兴趣的一个研究课题是一个分歧问题在什么条件下等价于给定的标准形式，因此必须寻找这一标准形式在等价群 $\mathscr{D}$ 作用下的轨道特征. 借助于奇点理论中的一个基本概念即有限决定性，这一问题常常可以约化为有限维情形来处理. $\mathscr{D}$ 模去高阶项将以 Lie 群方式作用，其轨道为半代数集，因而可以将轨道描述为由这样一些映射芽组成，它们的 Taylor 系数满足有限个多项式约束，并以等式和不等式形式表示，而这一描述正是识别问题的解.

Bruce, du Plessis 和 Wall 在研究映射芽的有限决定性问题时，引入幂单代数群和幂零 Lie 代数作为研究工具(见文献[11])，接着 Gaffney 将它们应用于带有多个分歧参数的分歧问题研究中，给出了 $\mathscr{D}(\Gamma)$-等价理论，见文献[20]. 尔后 Melbourne[54] 研究含一个分歧参数的等变分歧问题，假定它的状态空间与靶空间相同，他证明可以将群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 分解为幂单等价群 $U(\Gamma)$ 和线性等价群 $S(\Gamma)$，并且分歧问题可以作类似的分解，然后给出 $U(\Gamma)$-等价理论. 基于上述工作，讨论带有多个分歧参数的等变分歧问题，允许它的状态空间和靶空间不同，更一般地建立 $U(\Gamma)$-等价理论，见文献[41]. 当幂单切空间为 $U(\Gamma)$-内蕴子空间时，解识别问题归结为解有限维线性代数问题. 关于幂单代数群和幂零 Lie 代数，请参看文献[7]，[34]或[11].

与上节一样，假定紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 上，$n \geqslant m$.

13.5.1 $U(\Gamma)$-识别问题

将 Γ-等价群 $\mathscr{D}(\Gamma)$ 分解为 $U(\Gamma)$ 和 $S(\Gamma)$. 令

$$S(\Gamma) = \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^m)^0 \times \mathscr{L}_\Gamma(\mathbb{R}^n)^0 \times \mathscr{L}(\mathbb{R}^k)^0,$$

$$\pi: \mathscr{D}(\Gamma) \to S(\Gamma),$$

$$(S, X, \Lambda) \mapsto (S(0,0), (D_x X)_{(0,0)}, (D\Lambda)_0)$$

为 Γ-等价到其线性部分的投影.显然 π 是群的满同态,它的核

$$U(\Gamma) = \mathrm{Ker}\pi = \{(S, X, \Lambda) \in \mathscr{D}(\Gamma) \mid S(0,0) = I_m,$$
$$(D_x X)_{(0,0)} = I_n, (D\Lambda)_0 = I_k\}$$

是 $\mathscr{D}(\Gamma)$的正规子群,称为幂单等价群.对任意 $\delta \in \mathscr{D}(\Gamma)$,有

$$\delta = su_1 = u_2 s,$$

其中 $s \in S(\Gamma)$, u_1, $u_2 \in U(\Gamma)$.事实上,取 $s = \pi(\delta)$, $u_1 = \pi(\delta)^{-1}\delta$, $u_2 = \delta\pi(\delta)^{-1}$.并且分解也是惟一的,因为 $\pi(\delta) = \pi(s)\pi(u_1) = s$.应注意的是,一般来说 $u_1 \neq u_2$.

由上面的分解,有 $\mathscr{D}(\Gamma) = U(\Gamma) \cdot S(\Gamma)$,并且解 $\mathscr{D}(\Gamma)$识别问题可以依下列方法将对应的 $U(\Gamma)$及 $S(\Gamma)$识别问题的解组合起来而得到.这一方法是对于给定的标准形式 n,计算 $S(\Gamma)\cdot n$,然后对所有 $f \in S(\Gamma)\cdot n$,计算 $U(\Gamma)\cdot f$.因为

$$\mathscr{D}(\Gamma) \cdot n = U(\Gamma) \cdot S(\Gamma) \cdot n,$$

所以 $h \in \mathscr{D}(\Gamma)\cdot n$ 当且仅当$h \in U(\Gamma)\cdot f$ 对某一$f \in S(\Gamma)\cdot n$.下面着重考虑 $U(\Gamma)$-识别问题.

设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$.经计算,轨道 $U(\Gamma)\cdot g$ 在g 处的幂单切空间

$$T(g, U(\Gamma)) = \widetilde{T}(g, U(\Gamma)) + (D_\lambda g)(\mathscr{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}), \quad (1a)$$

其中

$$\widetilde{T}(g, U(\Gamma)) = \{Sg + (D_x g)X \mid (S, X) \in \widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$$
$$\times \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma), S(0,0) = 0_m, (D_x X)_{(0,0)} = 0_n\}, \quad (1b)$$

这里 0_m, 0_n 分别表示$m \times m$ 和$n \times n$ 零矩阵.

命题 13.5.1 $T(g, U(\Gamma))$与 $T(g, \mathscr{D}(\Gamma))$相差一个有限维实向量空间,因而它们在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$中的 Γ-余维数或同为有限

或同为无穷.

证 $\widetilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$和$\mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)$作为$\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$-模都是有限生成的,设生成元分别为

$$S_1,\cdots,S_t \text{ 和 } X_1,\cdots,X_s.$$

用$\mathscr{L}_1$表示由$S_1(0,0),\cdots,S_t(0,0)$张成的实向量子空间,用$\mathscr{L}_2$表示由$(\mathrm{D}_xX_1)_{(0,0)},\cdots,(\mathrm{D}_xX_s)_{(0,0)}$张成的实向量子空间.通过比较上节中(10)式与本节中(1)式,可以看出

$$T(g,\mathscr{D}(\Gamma)) = T(g,U(\Gamma)) + W,$$

其中

$$W = \mathbb{R}\{Sg + (\mathrm{D}_xg)X \mid S\in\mathscr{L}_1,(\mathrm{D}_xX)\in\mathscr{L}_2\} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant k}\mathbb{R}\left\{\lambda_j\frac{\partial g}{\partial\lambda_i}\right\},$$

可见W是一个有限维实向量空间,证毕.

今后说一个分歧问题$g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$具有有限$\Gamma$-余维就不必具体指明是关于$\mathscr{D}(\Gamma)$或$U(\Gamma)$而言.

定义 13.5.1 设$g\in\varepsilon_{n,k;m}(\Gamma)$.令

(i) $M(g,U(\Gamma)) = \{p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)\mid g+p\in U(\Gamma)\cdot g\}$
$= \{ug-g\mid u\in U(\Gamma)\}$,

(ii) $\mathscr{P}(g,U(\Gamma)) = \{p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)\mid h+p\in U(\Gamma)\cdot g\ \ \forall h\in U(\Gamma)\cdot g\}$,其成员叫做$g$关于群$U(\Gamma)$作用而言的高阶项.

显然,$\mathscr{P}(g,U(\Gamma))\subset M(g,U(\Gamma))$并且由(i)知,$h\in U(\Gamma)\cdot g$当且仅当$h-g\in M(g,U(\Gamma))$,因此解$U(\Gamma)$-识别问题相当于计算$M(g,U(\Gamma))$.

定义 13.5.2 (i) $\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的子空间$V$若在群$U(\Gamma)$作用下不变,即$U(\Gamma)\cdot V\subset V$,则$V$叫做$U(\Gamma)$-内蕴子空间.

(ii) 如果$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的子集$M$包含惟一的极大$U(\Gamma)$-内蕴子空间,那么这个子空间叫做$M$的$U(\Gamma)$-内蕴部分,记作$\mathrm{Itr}_{U(\Gamma)}M$.

为建立 $U(\Gamma)$-等价理论，需用到代数几何的下列结果(参看文献[11]中命题 3.3 和推论 3.5 或文献[54]中定理 3.2).

定理 13.5.1 设 U 是$\mathbb{R}$上的幂单仿射代数群，它代数地作用在仿射簇 V 上，则

(i) U 的轨道是 V 中的 Zariski 闭集，

(ii) 若 $x\in V$ 且 W 是 V 的 U-不变子空间，则 $x+W$ 包含在 U 的一条轨道中当且仅当 $LU\cdot x\supset W$，这里 LU 为群 U 的 Lie 代数，$LU\cdot x$ 和群轨道 $U\cdot x$ 在点 x 的切空间 $T_x(U\cdot x)$ 相一致.

推论 13.5.1 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维，则

(i) 轨道 $U(\Gamma)\cdot g$ 由有限个多项式方程组所确定，

(ii) 假设 M 是$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的 $U(\Gamma)$-内蕴子空间，那么 $M\subset M(g,\ U(\Gamma))$ 当且仅当 $M\subset T(g,\ U(\Gamma))$.

证 依条件，$T(g,\ U(\Gamma))$ 在 $\varepsilon_{n,k;m}(\Gamma)$ 中具有有限 Γ-余维，因而 g 关于群 $U(\Gamma)$ 是有限决定的，于是存在正整数 l，使得对所有 $p\in\mathscr{M}_{n,k;m}^{l+1}(\Gamma)$，有 $g+p\in U(\Gamma)\cdot g$. 而 $U(\Gamma)$ 在$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 上的作用诱导出它在导网空间 $J^l(\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma))$ 上的作用，因此可以将 $U(\Gamma)$ 看作幂单代数群作用在 $J^l(\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma))$ 上. 然后由定理 13.5.1 的(i)和(ii)分别得到本推论(i)和(ii). 证毕.

前面已经说过，解 $U(\Gamma)$-识别问题相当于计算 $M(g,\ U(\Gamma))$. 而由推论 13.5.1 的(i)，$M(g,\ U(\Gamma))$ 由有限个多项式方程组所确定. 特别当这些方程都是线性方程时，$M(g,\ U(\Gamma))$ 便是具有有限 Γ-余维的向量子空间，将 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 叫做线性决定的分歧问题. 此外，有

$$\operatorname{Codim}M(g,\ U(\Gamma)) = \text{确定 } U(\Gamma)\cdot g \text{ 的方程最少个数}$$
$$= \operatorname{Codim}T(g,\ U(\Gamma)),$$

此时只需使用线性代数的知识便可以解 $U(\Gamma)$-识别问题. 进而有

命题 13.5.2 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维. 若 $M(g,\ U(\Gamma))$ 是$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的向量子空间，则 $M(g,\ U(\Gamma))$ 必为 $U(\Gamma)$-

内蕴子空间.

证 设 $p \in M(g, U(\Gamma))$, $u \in U(\Gamma)$, 需证 $up \in M(g, U(\Gamma))$ 或 $g + up \in U(\Gamma)\cdot g$. 如果下列事实成立:

$$\text{对任意 } h \in U(\Gamma)\cdot g,\ h + p \in U(\Gamma)\cdot g, \tag{2}$$

那么 $g + up = u(u^{-1}g + p) \in U(\Gamma)\cdot g$. 下证(2)式.

因 $h \in U(\Gamma)\cdot g$, $h - g \in M(g, U(\Gamma))$. 又因 $M(g, U(\Gamma))$ 是向量子空间, 所以 $(h + p) - g = (h - g) + p \in M(g, U(\Gamma))$, 从而 $h + p \in U(\Gamma)\cdot g$.

本命题可改叙为

命题 13.5.2′ 若 $g \in \mathcal{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维, 则 $M(g, U(\Gamma))$ 是 $\mathcal{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的向量子空间当且仅当它是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间.

设 $g \in \mathcal{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维, 但不假定 $M(g, U(\Gamma))$ 是 $\mathcal{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 的向量子空间. 下面将证明 $\mathcal{P}(g, U(\Gamma))$ 是包含在 $M(g, U(\Gamma))$ 中的惟一的极大 $U(\Gamma)$-内蕴子空间, 并且基于幂单群的性质(见推论 13.5.1)还可证明 $\mathcal{P}(g, U(\Gamma))$ 是幂单切空间的 $U(\Gamma)$-内蕴部分.

命题 13.5.3 设 $g \in \mathcal{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维, 则

(i) $\mathcal{P}(g, U(\Gamma)) = \mathrm{Itr}_{U(\Gamma)} M(g, U(\Gamma))$,

(ii) $\mathcal{P}(g, U(\Gamma)) = \mathrm{Itr}_{U(\Gamma)} T(g, U(\Gamma))$.

证 (i) 首先证明 $\mathcal{P}(g, U(\Gamma))$ 是 $M(g, U(\Gamma))$ 的向量子空间. 设 $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(g, U(\Gamma))$, $h \in U(\Gamma)\cdot g$. 依定义, $h + p_1 \in U(\Gamma)\cdot g$ 并且 $(h + p_1) + p_2 \in U(\Gamma)\cdot g$. 由于 $h \in U(\Gamma)\cdot g$ 是任取的, 所以 $p_1 + p_2 \in \mathcal{P}(g, U(\Gamma))$. 这说明 $\mathcal{P}(g, U(\Gamma))$ 对于加法运算是封闭的. 现看纯量乘法, 令集

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid h + tp \in U(\Gamma)\cdot g\},$$

其中 $p \in \mathcal{P}(g, U(\Gamma))$, $h \in U(\Gamma)\cdot g$. 易见 $\mathbb{N} \subset T$. 据推论 13.5.1 的(i), $U(\Gamma)\cdot g$ 由有限个多项式方程组确定. 因此 $t \in T$ 当且仅

当 t 是这有限个多项式的公共零点. 然而 $T \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ 为无限集, 故 $T=\mathbb{R}$. 这说明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 不仅对加法, 而且对纯量乘法也是封闭的. 从而 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是向量空间.

再证 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 设 $p \in \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$, $u \in U(\Gamma)$. 任取 $h \in U(\Gamma) \cdot g$, 则

$$h + up = u(u^{-1}h + p) \in U(\Gamma) \cdot g,$$

依定义, $up \in \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$. 这说明 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

最后证明 $M(g, U(\Gamma))$ 中的 $U(\Gamma)$-内蕴子空间 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是极大的并且是惟一的. 假定 $P \subset M(g, U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 取 $p \in P$, $h = ug$, $u \in U(\Gamma)$, 则

$$h + p = ug + p = u(g + u^{-1}p) \in U(\Gamma) \cdot g,$$

于是 $p \in \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 并且 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 是极大的、惟一的.

(ii) 由推论 13.5.1 的(ii)及上述(i)可推得, 细节留给读者.

推论 13.5.2 $g \in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 是线性决定的分歧问题当且仅当 $M(g, U(\Gamma)) = \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$.

证 据分歧问题是线性决定的定义及命题 13.5.2′, g 为线性决定的分歧问题 $\Leftrightarrow M(g, U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 再据命题 13.5.3 的(i), $M(g, U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间 $\Leftrightarrow M(g, U(\Gamma)) = \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$. 从而本推论成立.

为了进一步刻画线性决定的分歧问题, 我们引入 Wall 的下列引理(参看文献[54]).

引理 13.5.1 设 U 为幂单代数群线性地作用在向量空间 V 上. 假定 $v \in V$ 使得 $LU \cdot v$ 是 V 的 U-不变子空间, 那么 $U \cdot v$ 为仿射子空间 $v + LU \cdot v$.

证 设 $N_1, \cdots, N_k$ 为 Lie 代数 LU 的基. 因为 U 是幂单群, 所以它的 Lie 代数是幂零的, 因而存在正整数 r, 使得诸 N_i 的积若因子个数多于 r 则为 0. 注意切空间 $LU \cdot v$ 由诸 $N_i v$ 张成, 按假设它是 U-不变的, 故任意 $N_i N_j v$ 仍属于 $LU \cdot v$. 而 $U \cdot v$ 和 $v +$

$LU\cdot v$ 具有相同维数,又 $U\cdot v$ 在 V 中是 Zariski 闭的,若能证明 $U\cdot v\subset v+LU\cdot v$,则 $U\cdot v=v+LU\cdot v$. 下证 $U\cdot v\subset v+LU\cdot v$,因为指数映射

$$\exp:\ LU\to U$$

是连续满射,只要证明对任意 $N=\sum\lambda_iN_i\in LU$,$e^Nv\in v+LU\cdot v$ 就行了. 而 e^Nv 可写为

$$e^Nv=v+\sum\lambda_iN_iv+\frac{1}{2}\left(\sum\lambda_iN_i\right)^2v+\cdots+\frac{1}{r!}\left(\sum\lambda_iN_i\right)^rv,$$

又任意 N_iN_jv 是诸 N_iv 的线性组合,依归纳法可推出,除上式第一项外,其他各项均位于 $LU\cdot v$ 中.

定理 13.5.2 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维,则 g 为线性决定的分歧问题当且仅当 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间. 在这种情形下,

$$\mathscr{P}(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma))=T(g,U(\Gamma)).$$

证 $\Rightarrow$ 由推论 13.5.2,有 $M(g,U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,U(\Gamma))\subset T(g,U(\Gamma))$. 而 $\operatorname{Codim}M(g,U(\Gamma))=\operatorname{Codim}T(g,U(\Gamma))$,故 $T(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma))=T(g,U(\Gamma))$,并且 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

$\Leftarrow$ 由引理 13.5.1 可导出

$$T(g,U(\Gamma))=M(g,U(\Gamma)).$$

又由命题 13.5.3,$T(g,U(\Gamma))=\mathscr{P}(g,U(\Gamma))$. 再据推论 13.5.2,$g$ 是线性决定的分歧问题. 证毕.

给定分歧问题 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$,问:对于什么样的扰动 $p\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$,使得对所有 $t\in\mathbb{R}$,$g+tp$ 皆 $U(\Gamma)$-等价于g 呢? 作为定理 13.5.2 的一个应用,有

推论 13.5.3 设 $g\in\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$ 具有有限 Γ-余维,且 $T(g,U(\Gamma))$ 是 $U(\Gamma)$-内蕴的,则

$$\{g + tp \mid \forall t \in \mathbb{R}\} \subset U(\Gamma) \cdot g \Leftrightarrow p \in \mathscr{P}(g, U(\Gamma))$$

$$(\text{或 } p \in T(g, U(\Gamma))).$$

13.5.2 $U(\Gamma)$-内蕴子空间的判定

本段为判定$\mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$的子空间是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间提供一些方法,它与计算分歧问题 g 的高阶项所成之空间 $\mathscr{P}(g, U(\Gamma))$ 和判断 $T(g, U(\Gamma))$及 $M(g, U(\Gamma))$的内蕴性有关.

命题 13.5.4 设 $M \subset \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$是具有有限 Γ-余维的子空间,则 M 为$U(\Gamma)$-内蕴子空间当且仅当$LU(\Gamma) \cdot M \subset M$.

证明可参看文献[41]或[54].

下面介绍判断 $U(\Gamma)$-内蕴子空间的一些方法.首先注意下列简单事实:设 $q = (q_1, \cdots, q_m) \in \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma)$, q 的每一分量q_i 为多项式函数芽,那么不难看出 $J^l U(\Gamma)(l \geqslant 1)$作用于 q 不会降低每一q_i 因而q 的次数.并且由于 $U(\Gamma)$-等价的Λ 部分只允许依赖于λ,因此 q 关于λ 的次数也不会降低.进而可以推出:对任意 $s \geqslant 1$, $t \geqslant 0$,子空间

$$\mathscr{M}_k^t \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^s(\Gamma) \tag{3}$$

是 $U(\Gamma)$-内蕴的.又因为 $U(\Gamma)$的作用是线性的,形如(3)式的子空间之和仍为 $U(\Gamma)$-内蕴的.于是有

命题 13.5.5 形如

$$\mathscr{M}_k^t \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^s(\Gamma),\ t \geqslant 0,\ s \geqslant 1$$

的子空间之和是 $U(\Gamma)$-内蕴子空间.

定理 13.5.3 假设 W 是

$$\mathscr{M}_k^{l_0} \cdot \mathscr{E}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_1 - 1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_1}(\Gamma) + \cdots + \mathscr{M}_k^{l_s - 1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_s}(\Gamma)$$

的子空间,k_i, $l_i > 0$,那么

$$\mathscr{M}_k^{l_0} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_1 - 1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_1 + 1}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_1 - 1}(\Gamma) + \cdots$$

$$+ \mathscr{M}_k^{l_s - 1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_s + 1}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_s} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_s - 1}(\Gamma) + W$$

是 $U(\Gamma)$-内蕴的.

证 据命题 13.5.5,

$$H = \mathscr{M}_k^{l_0} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_1-1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_1+1}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_1-1}(\Gamma)$$

$$+ \cdots + \mathscr{M}_k^{l_s-1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_s+1}(\Gamma) + \mathscr{M}_k^{l_s} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{k_s-1}(\Gamma)$$

是 $U(\Gamma)$-内蕴的.欲证本定理成立,依命题 13.5.4,只需证明

$$LU(\Gamma) \cdot W \subset H. \tag{4}$$

下面分为两种情形来考虑.

1) 若 $q \in W$ 位于 $\mathscr{M}_k^{l-1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^t(\Gamma)$中,$l, t > 0$,则

$$LU(\Gamma) \cdot q = T(q, U(\Gamma)) \subset H_1 = \mathscr{M}_k^{l-1} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{t+1}(\Gamma)$$

$$+ \mathscr{M}_k^l \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^{t-1}(\Gamma). \tag{5}$$

为证(5)式,注意到

$$T(q, U(\Gamma)) = \{Sq + (\mathrm{D}_x q)X + (\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \mid (S, X, \Lambda)$$

$$\in \tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \times \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma) \times \mathscr{M}_k \cdot \varepsilon_k^{\times k}, S(0, 0)$$

$$= 0_m, (\mathrm{D}_x X)_{(0,0)} = 0_n, (\mathrm{D}\Lambda)_0 = 0_k\}. \tag{6}$$

易见

$$Sq \in H_1, (\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \in \mathscr{M}_k^l \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^t(\Gamma) \subset H_1,$$

这是因为 $\Lambda \in \mathscr{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}$, $\dfrac{\partial q}{\partial \lambda_1}, \cdots, \dfrac{\partial q}{\partial \lambda_k} \in \mathscr{M}_k^{l-2} \cdot \mathscr{M}_{n,k;m}^t(\Gamma)$(约定 $\mathscr{M}_k^{-1} = \mathscr{M}_k^0 = \varepsilon_k$).

$(\mathrm{D}_x q)X \in H_1$, 理由如下:由 $X \in \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma)$及$(\mathrm{D}_x X)_{(0,0)} = 0_n$ 知,$X \in \mathscr{M}_{n,k}^2(\Gamma) + \mathscr{M}_k \cdot \varepsilon_{n,k}(\Gamma)$.假定 q 是关于x 和λ 的多项式映射芽,那么$\dfrac{\partial q}{\partial x_j}(j = 1, \cdots, n)$关于 x 的次数比q 关于x 的次数少 1,而$\dfrac{\partial q}{\partial x_j}$关于$\lambda$ 的次数则与q 相同,因而可推出

$$(\mathrm{D}_x q)X \in H_1,$$

于是(5)式成立.

2) 若 $q \in W$ 位于 $\mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$中,则

$$LU(\Gamma) \cdot q = T(q, U(\Gamma)) \subset \mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}(\Gamma) = H_2. \quad (7)$$

事实上,由(6)式易见 $Sq \in H_2$,

$$(\mathrm{D}_\lambda q)\Lambda \in \mathcal{M}_k^{l_0+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \subset H_2,$$

这是因为 $\Lambda \in \mathcal{M}_k^2 \cdot \varepsilon_k^{\times k}$, $\frac{\partial q}{\partial \lambda_1}, \cdots, \frac{\partial q}{\partial \lambda_k} \in \mathcal{M}_k^{l_0-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$,并且 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_k \varepsilon_{n,k} \subset \mathcal{M}_{n,k}$又

$$(\mathrm{D}_x q)X \in \mathcal{M}_k^{l_0} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n,k;m}(\Gamma) + \mathcal{M}_k^{l_0+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) \subset H_2,$$

因此(7)式成立.

最后,利用群 $U(\Gamma)$作用的线性性质便知(4)式成立.从而完成本定理证明.

13.5.3 解识别问题之例

设 $g(x, \lambda) = \varepsilon(x^2 + \delta\lambda)^2 + \sigma x^5 (\varepsilon, \delta, \sigma = \pm 1)$为单参数分歧问题,只含一个状态变量,且不考虑对称性,即对称群 $\Gamma = 1$. 此时 $\mathcal{D}(1)$, $U(1)$分别记为 $\mathcal{D}$, U. 该例取自文献[54]中例 6.1,它还出现在文献[36]的表 3.5 中,并为文献[20]中例 1.13.

切空间 $T(g, \mathcal{D}) = RT(g, \mathcal{D}) + \varepsilon_\lambda\{\lambda g_\lambda\}$, 其中 $RT(g, \mathcal{D}) = \varepsilon_{x,\lambda}\{g, xg_x, \lambda g_x\}$. 经计算 $\dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_{x,\lambda}/T(g, \mathcal{D}) = 6$, 即 g 的余维数为 6.

容易验证,通过改变 x 和 λ 的尺度, $f(\in \varepsilon_{x,\lambda})$等价于 g 当且仅当

$$f(x, \lambda) = a(x^2 + b\lambda)^2 + cx^5, \quad (8)$$

其中, $\mathrm{sign}\, a = \varepsilon$, $\mathrm{sign}\, b = \delta$, $\mathrm{sign}\, c = \sigma$.

按照定义,并作简单计算,有

$$T(f,\ U) = \widetilde{T}(f,\ U) + \varepsilon_\lambda\{\lambda^2 f_\lambda\},$$

$$\widetilde{T}(f,\ U) = \varepsilon_{x,\lambda}\{xf,\ \lambda f,\ x^2 f_x,\ \lambda f_x\}.$$

通过计算可得到

$$\begin{aligned} T(f,\ U) = \widetilde{T}(f,\ U) &= \mathscr{P}(f,\ U) \\ &= H + \mathbb{R}\{x^5 + bx^3\lambda,\ x^3\lambda + bx\lambda^2\}, \end{aligned}$$

其中 $H = \mathscr{M}_{x,\lambda}^6 + \mathscr{M}_{x,\lambda}^4\langle\lambda\rangle + \mathscr{M}_{x,\lambda}^2\langle\lambda^2\rangle + \langle\lambda^3\rangle$，又$\langle\lambda\rangle$表 ε_λ 中由 λ 生成的理想. 类似地，ε_λ 中理想$\langle\lambda^2\rangle$，$\langle\lambda^3\rangle$分别由 λ^2 和 λ^3 生成. 然而 $\mathscr{P}(f,\ \mathscr{D}) = H$.

据定理 13.5.2，f 是线性决定的分歧问题，因而

$$\begin{aligned} U\cdot f &= f + T(f,\ U) \\ &= ax^4 + 2abx^2\lambda + ab^2\lambda^2 + cx^5 + A(x^5 + bx^3\lambda) \\ &\quad + B(x^3\lambda + bx\lambda^2) + H. \end{aligned}$$

$h \in U\cdot f$ 当且仅当在点 $O \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ h_{xxxx} = 24a,\ h_{xx\lambda} = 4ab,\ h_{\lambda\lambda} = 2ab^2, \\ h_{xxxxx} = 120(c + A),\ h_{xxx\lambda} = 6(Ab + B), \\ h_{x\lambda\lambda} = 2Bb. \end{cases} \tag{9}$$

条件(9)等价于

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ h_{xxxx} = 24a,\ 6h_{xx\lambda} = bh_{xxxx}, \\ h_{xxxx}\cdot h_{\lambda\lambda} - 3h_{xx\lambda}^2 = 0, \\ \dfrac{h_{xxxxx}}{120} - \dfrac{h_{xxx\lambda}}{66} + \dfrac{h_{x\lambda\lambda}}{2b^2} = c. \end{cases} \tag{10}$$

(10)与(8)式合起来得出下列结果，$h \in \mathscr{D} \cdot g$ 当且仅当

$$\begin{cases} h = h_x = h_{xx} = h_{xxx} = 0,\ h_\lambda = h_{x\lambda} = 0, \\ \operatorname{sign} h_{xxxx} = \varepsilon,\ \operatorname{sign} h_{xx\lambda} = \varepsilon\delta, \\ h_{xxxx} \cdot h_{\lambda\lambda} - 3h_{xx\lambda}^2 = 0, \\ \operatorname{sign}\left(h_{xxxxx} - 10 \cdot \dfrac{h_{xxx\lambda} \cdot h_{xx\lambda}}{h_{\lambda\lambda}} + 15 \cdot \dfrac{h_{x\lambda\lambda} \cdot h_{xx\lambda}^2}{h_{\lambda\lambda}^2} \right) = \sigma. \end{cases} \tag{11}$$

(11)式便是关于 g 的识别问题的解.

关于解 $S(\Gamma)$-识别问题，上例考虑的是对状态变量与分歧参数作尺度变化，计算较易，此时 Lie 群 Γ 的作用是绝对不可约的.如果 Γ 的作用不是绝对不可约的.尽管 $S(\Gamma)$为线性等价群，有时讨论起来也并非简单.可参看文献[54]的§7，并且在该文献中还提供了解识别问题的一些典型例子.应指出的是，除本节所引的参考文献外，例如文献[30]和[31]系统地给出了解识别问题的方法与技巧，有兴趣的读者从中可学到更多的知识.

§13.6　等变分歧问题的开折

静态分歧研究方程 $F=0$ 的多重解问题，而方程往往是对真实的自然现象或科学技术中提出的问题进行抽象并作一定简化后得到的数学模型.现实状态与理想状态之间存在着差别，我们可以把真实状态看作是理想状态的一个"扰动"，研究这种扰动对方程的分歧性态的影响.通过引入附加参数并引进开折的概念，用来描述可能出现的扰动.开折理论是对映射芽的扰动族进行研究.当考虑等变分歧问题时，即考虑有群作用的对称分歧问题时，这种扰动自然要求是等变扰动.本节介绍的等变通用开折定理是应用奇点理论方法研究带有对称性的分歧问题的一个重要结果，该定理断言具有有限余维的等变映射芽皆有万有开折，因此对可能出现的扰动、产生的分歧现象能有效地加以分析，进而考虑分类，从而为

分歧理论的应用提供理论依据.

13.6.1 基本概念

定义 13.6.1 设 $g(x,\lambda)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$是以紧致 Lie 群 Γ 为对称群、带有 k 个分歧参数的等变分歧问题. g 的 r-参数Γ-开折是一个 Γ-等变映射芽 $G(x,\lambda,\alpha)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\in\mathbb{R}^r$ 为开折参数，并且

$$G(x,\lambda,0)=g(x,\lambda),$$

这里 $G\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$意指它是映射 $G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^m$ 在点(0,0,0)处的芽，满足等变性条件

$$G(\gamma x,\lambda,\alpha)=\gamma G(x,\lambda,\alpha),\ \forall\gamma\in\Gamma,$$

群 Γ 对参数λ,α 的作用是平凡的.

由上述定义知，Γ-开折G 表示g 的一族扰动，并且保持对称性. 对照定义 8.1.1，上述定义中的 G 应叫做g 的r-参数“形变”，但我们采用分歧理论中的习惯用语，例如见文献[31].

定义 13.6.2 设 $G(x,\lambda,\alpha)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$, $H(x,\lambda,\beta)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,s;m}(\Gamma)$分别为分歧问题 $g(x,\lambda)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的 r-参数和s-参数Γ-开折. 如果存在 $X\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,s}(\Gamma)$, $S\in\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n,k,s;m}(\Gamma)$, $\Lambda\in\varepsilon_{\lambda,\beta}^{\times k}$, $A\in\varepsilon_{\beta}^{\times r}$，使得

$$H(x,\lambda,\beta)=S(x,\lambda,\beta)G(X(x,\lambda,\beta),\Lambda(\lambda,\beta),A(\beta)),\tag{1}$$

并且

$$\begin{aligned}S(x,\lambda,0)=I_m,\ X(x,\lambda,0)=x,\\ \Lambda(\lambda,0)=\lambda,\ A(0)=0,\end{aligned}\tag{2}$$

那么说 H 可由G 导出.

条件(2)的要求是合理的，因 G 和H 均为g 的开折. 而条件(1)说明对每一 β, $H(\cdot,\cdot,\beta)$ Γ-等价于族G 中的某一成员

$G(\cdot,\cdot,A(\beta))$.

如果在上述定义中，$A:(\mathbb{R}^s,0)\to(\mathbb{R}^r,0)$还是微分同胚芽，则称 H 与 G 是Γ-同构的.此时必有 $s=r$，并且不难验证，不仅 H 可由 G 导出而且 G 也可由 H 导出.

定义 13.6.3 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的 Γ-开折 G 叫做Γ-通用开折，如果 g 的每一个Γ-开折都可由 G 导出. g 的Γ-通用开折G 是万有开折，若 G 所含的开折参数的数目最少.并且将 g 的Γ-万有开折所含的开折参数个数叫做g 的Γ-余维数，记为 $\mathrm{Codim}_\Gamma g$.

13.6.2 等变切空间与等变通用开折定理

首先考虑 g 的Γ-开折G 为通用开折的必要条件.任取 $p\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$，$g+tp$ 是g 的最简单 1-参数开折，t 为开折参数.假定 $G(x,\lambda,\alpha)$为 g 的r-参数Γ-通用开折，那么按照定义，$g+tp$ 可由 G 导出，即存在$(S,X,\Lambda)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k,1;m}(\Gamma)\times\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,1}(\Gamma)\times\varepsilon_{\lambda,t}^{\times k}$ 及$A:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}^r$，使得

$$g(x,\lambda)+tp(x,\lambda)=S(x,\lambda,t)G(X(x,\lambda,t),\Lambda(\lambda,t),A(t)),\tag{3}$$

其中 $S(x,\lambda,0)=I_m$，$X(x,\lambda,0)=x$，$\Lambda(\lambda,0)=\lambda$，$A(0)=0$.

(3) 式两边对 t 求导并在$t=0$处取值，得

$$p(x,\lambda)=[\dot{S}(x,\lambda,0)g(x,\lambda)+(\mathrm{D}_xg)_{(x,\lambda)}\cdot\dot{X}(x,\lambda,0)+(\mathrm{D}_\lambda g)_{(x,\lambda)}\cdot\dot{\Lambda}(\lambda,0)]+\left[\sum_{j=1}^{r}G_{\alpha_j}(x,\lambda,0)\cdot\dot{A}_j(0)\right],\tag{4}$$

(4)式右边的第一个括号中的芽正是将要定义的切空间的成员，现对它的各项分析如下：因 $S(x,\lambda,t)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k,1;m}(\Gamma)$，$X(x,\lambda,t)\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,1}(\Gamma)$，易见 $\dot{S}(x,\lambda,0)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$，$\dot{X}(x,\lambda,0)\in$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)$，又 $\dot{\Lambda}(\lambda, 0) \in \varepsilon_\lambda^{\times k}$. 若 $\dot{X}(0,0,0)=0$，则

$$\dot{S}(x, \lambda, 0) g(x, \lambda)+(\mathrm{D}_x g) \cdot \dot{X}(x, \lambda, 0) \in R T(g, \Gamma) .$$

此外，倘若 $\dot{\Lambda}(0,0)=0$，则$(\mathrm{D}_\lambda g) \cdot \dot{\Lambda}(\lambda, 0) \in(\mathrm{D}_\lambda g)(\mathscr{M}_\lambda \cdot \varepsilon_\lambda^{\times k})$. 从而(4)式右边的第一个括号中的芽位于 $T(g, \Gamma)$中(参看§13.4中公式(10)与(11)).

定义 13.6.4 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma)$为等变分歧问题. 定义在 g 处的Γ-等变切空间 $T_e(g, \Gamma)$为

$$\begin{aligned} T_e(g, \Gamma)= & \{S g+(\mathrm{D}_x g) X+(\mathrm{D}_\lambda g) \Lambda \mid(S, X, \Lambda) \\ & \in \tilde{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma) \times \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k}(\Gamma) \times \varepsilon_\lambda^{\times k}\} . \end{aligned} \tag{5}$$

易见

$$T_e(g, \Gamma)=(\mathrm{D}_x g)(\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k}(\Gamma))+\tilde{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma) \cdot g+(\mathrm{D}_\lambda g)(\varepsilon_\lambda^{\times k}). \tag{6}$$

并且由(4)式，

$$p \in T_e(g, \Gamma)+\mathbb{R}\{G_{\alpha_1}(x, \lambda, 0), \cdots, G_{\alpha_r}(x, \lambda, 0)\},$$

由于 $p \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma)$是任取的，因此得到 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma)$的 r-参数 Γ-开折$G \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n, k, r ; m}(\Gamma)$为通用开折的必要条件是

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma)=T_e(g, \Gamma)+\mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}, \cdots,\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}.$$

本节的主要任务是在适当的条件下证明其逆也是正确的，为此对等变切空间作进一步分析.

命题 13.4.1 告诉我们，$R T(g, \Gamma)$是 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma)$中的有限生成 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$-子模，其中

$$R T(g, \Gamma)=(\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma))+\tilde{\varepsilon}_{n, k ; m}(\Gamma) \cdot g .$$

可以证明环 $\varepsilon_{x, \lambda}(\Gamma)$上的有限生成模 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n, k}(\Gamma)$和$\mathscr{M}_{n, k}(\Gamma)$有下列

关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma) = \mathscr{M}_{n,k}(\Gamma) \oplus W,$$

其中有限维实向量空间 W 由在原点的值非零的 Γ-等变芽 $Y_1, \cdots, Y_l$ 所张成，于是

$$\begin{aligned} T_e(g, \Gamma) = RT(g, \Gamma) + \mathbb{R}\{(\mathrm{D}_x g)(Y_1), \cdots, (\mathrm{D}_x g)(Y_l)\} \\ + (\mathrm{D}_\lambda g)(\varepsilon_\lambda^{\times k}). \end{aligned} \tag{7}$$

定理 13.6.1(等变通用开折定理)　设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在两个可能不同的空间$\mathbb{R}^n$ 和$\mathbb{R}^m$ 上，$n \geqslant m$. $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$为等变分歧问题满足条件

$$\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)/RT(g, \Gamma) < \infty, \tag{8}$$

那么 g 的 r-参数Γ-开折$G \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,r;m}(\Gamma)$为通用开折当且仅当

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}, \cdots, \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}. \tag{9}$$

证明放在第四段.

注　(i) $T_e(g, \Gamma)$一般来说不是 $\varepsilon_{x,\lambda}(\Gamma)$-模. 为克服这一困难，在定理中附加了条件(8)，现在来看看该条件的意义. 取 Γ 为平凡群，即考虑不带对称性的分歧问题，这时的限制切空间

$$\begin{aligned} RT(g, 1) &= (\mathrm{D}_x g)(\mathscr{M}_{x,\lambda} \cdot \varepsilon_{x,\lambda}^{\times n}) + g^* \mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_{x,\lambda}^{\times m} \\ &= \mathscr{M}_{x,\lambda}\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right\} + g^* \mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}. \end{aligned}$$

条件(8)可写为

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(1)/RT(g, 1) \\ &\quad = \dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_{x,\lambda}^{\times m} \Big/ \left[\mathscr{M}_{x,\lambda}\left\{\frac{\partial g}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right\} + g^* \mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_{x,\lambda}^{\times m}\right] \\ &\quad = \dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x^{\times m} \Big/ \left[\mathscr{M}_x\left\{\frac{\partial g_0}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial g_0}{\partial x_n}\right\} + g_0^* \mathscr{M}_y \cdot \varepsilon_x^{\times m}\right] \end{aligned}$$

$$= \dim_{\mathbb{R}} \varepsilon_x^{\times m} / Tk(g_0) < \infty,$$

这里 $g_0:(\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^m$ 定义为 $g_0(x) = g(x, 0)$. 上式说明 g_0 是有限奇点型的映射芽，此时把 g 叫做有限型的分歧问题，因此本定理说明可以对一大类有限型的分歧问题考虑它们的通用开折.

(ii) 从条件(8)立即有

$$\dim_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) / T_e(g, \Gamma) < \infty,$$

即 g 的 Γ-余维数有限. 并且当(9)式中的和为直和时，G 为 g 的万有开折.

推论 13.6.1 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 满足条件(8). 假设实向量子空间 $W \subset \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$，使得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) \oplus W,$$

若 $p_1, \cdots, p_r \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 为 W 的一组基，则

$$G(x, \lambda, \alpha) = g(x, \lambda) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j p_j(x, \lambda)$$

是 g 的 Γ-万有开折.

例 1 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2))$ 定义为 $g(z, \lambda) = (\varepsilon_1 u + \varepsilon_2 \lambda) z$，其中 $u = z\bar{z}$，$|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$. 因 $\boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2)) = \mathscr{M}_{z,\lambda}(O(2))$，由 §13.4 例 4 可知

$$T_e(g, O(2)) = RT(g, O(2)) + \varepsilon_\lambda \{[p_\lambda]\},$$

其中 $RT(g, O(2))$ 由 $[p]$ 和 $[up_u]$ 所生成. 经计算，得

$$T_e(g, O(2)) = \varepsilon_{u,\lambda} \cdot \{z\} = \boldsymbol{\varepsilon}_{z,\lambda}(O(2)),$$

这说明 g 的 $O(2)$-余维数为 0，它的 $O(2)$-万有开折为其自身.

例 2 设 $g \in \boldsymbol{\varepsilon}_{2,1}(Z_2 \oplus Z_2)$ 为等变分歧问题，含有两个状态变量 x 与 y，一个分歧参数 λ，定义为

$$g(x, y, \lambda) = (\varepsilon_1 x^3 + mxy^2 + \varepsilon_2 \lambda x,\ nx^2 y + \varepsilon_3 y^3 + \varepsilon_4 \lambda y), \tag{10}$$

其中 $m \neq \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$，$n \neq \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4$，$mn \neq \varepsilon_1\varepsilon_3$，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 取值 ± 1. 据文献[30]中的 X,(2.10)，g 是非退化的 $Z_2 \oplus Z_2$-等变分歧问题的标准形式，用不变坐标函数表示，g 可写为

$$g(x, y, \lambda) = [\varepsilon_1 u + mv + \varepsilon_2\lambda, \ nu + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4\lambda],$$

其中 $u = x^2$，$v = y^2$. 使用不变坐标的好处是它给出 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x, y, \lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u, v, \lambda}$ 之间的同构. 又 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u, v, \lambda}$ 是环 $\varepsilon_{u, v, \lambda}$ 上的模，因此 $RT(h, Z_2 \oplus Z_2)$ 可看作 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u, v, \lambda}$ 的子模，由 §13.4 例 3 知，它的 6 个生成元为

$$[p, 0], [0, q], [0, up], [vq, 0], [up_u, uq_u], [vp_v, vq_v],$$

这里 $h = [p, q]$. 应用于标准形式 g，不难验证

$$RT(g, Z_2 \oplus Z_2) = \mathscr{M}^2_{u, v, \lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{u, v, \lambda} + \mathbb{R}\{[\varepsilon_1 u + mv + \varepsilon_2\lambda, 0], [0, nu + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4\lambda], [\varepsilon_1 u, nu], [mv, \varepsilon_3 v]\},$$

并且

$$T_e(g, Z_2 \oplus Z_2) = RT(g, Z_2 \oplus Z_2) + \mathbb{R}\{[\varepsilon_2, \varepsilon_4], [\varepsilon_2\lambda, \varepsilon_4\lambda]\}.$$

为得到 g 的万有开折，首先证明下列断言：$[v, 0]$ 和 $[0, u]$ 及 $[0, -\varepsilon_4]$ 张成 $T_e(g, Z_2 \oplus Z_2)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x, y, \lambda}(Z_2 \oplus Z_2)$ 中的补空间. 为使

	1	u	v	λ	1	u	v	λ
$RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ 中的向量		ε_1	m	ε_2				
					n	ε_3	ε_4	
		ε_1			n			
			m			ε_3		
$T_e(g, Z_2 \oplus Z_2) - RT(g, Z_2 \oplus Z_2)$ 中的向量	ε_2				ε_4			
				ε_2				ε_4
张成 $T_e(g, Z_2 \oplus Z_2)$ 的补空间的向量			1					
						1		
					ε_4			

计算简便，最好模去 $\mathscr{M}^2_{u,v,\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$，因为它包含在 $RT(g, Z_2\oplus Z_2)$中.将上述 9 个向量列入上表中.

注意 $\mathscr{M}^2_{u,v,\lambda}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{u,v,\lambda}$ 的补空间的基由$[1, 0][u, 0][v, 0]$, $[\lambda, 0]$, $[0, 1]$, $[0, u]$, $[0, v]$, $[0, \lambda]$组成，又上表中的 9×8 矩阵，它的第 1,2 行之和等于第 3,4,6 行之和，故可删去第 6 行.又将第 7,8,9 行和第 3,5,6 列划去所得的 5×5 矩阵参见下表。

1	u	λ	v	λ
	ε_1	ε_2		
			ε_3	ε_4
	ε_1			
			ε_3	
ε_2				

显然具有秩 5，由此可见 9×8 矩阵的秩为 8，$T_e(g, Z_2\oplus Z_2)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2\oplus Z_2)$中的余维数为 3，$[v, 0]$, $[0, u]$, $[0, -\varepsilon_4]$是 $T_e(g, Z_2\oplus Z_2)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,y,\lambda}(Z_2\oplus Z_2)$中的补空间的基，断言成立.从而 g 的$Z_2\oplus Z_2$-万有开折为

$$G(x, y, \lambda, \alpha, \tilde{n}, \tilde{m}) = [\varepsilon_1 u + \tilde{m}v + \varepsilon_2\lambda,\quad \tilde{n}u + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4(\lambda - \alpha)].$$

13.6.3 两个引理

证明等变通用开折定理的充分性，基本思路与第九章中两个通用开折定理的证明类似，需用到两个引理.在介绍代数引理前，引入下列记号.

设 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$.它的切空间

$$T_e(g, \Gamma) = \tilde{T}(g, \Gamma) + \varepsilon_\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial\lambda_1}, \cdots, \frac{\partial g}{\partial\lambda_k}\right\},$$

其中

$$\tilde{T}(g, \Gamma) = \{Sg + (\mathrm{D}_x g)X \mid (S, X)\in\tilde{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)\times\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k}(\Gamma)\}.$$

显然 $RT(g, \Gamma)\subset\widetilde{T}(g, \Gamma)\subset T_e(g, \Gamma)$.若 $RT(g, \Gamma)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$ 中的余维数有限,则 $\widetilde{T}(g, \Gamma)$及 $T_e(g, \Gamma)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$中的余维数均有限.

现设 $G\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$是 g 的l-参数Γ-开折,开折参数为 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_l)$.形式地定义 G 的切空间,令

$$T_e^u(G, \Gamma) = \widetilde{T}^u(G, \Gamma) + \varepsilon_{\lambda,\delta}\left\{\frac{\partial G}{\partial\lambda_1},\cdots,\frac{\partial G}{\partial\lambda_k}\right\},$$

其中

$$\widetilde{T}^u(G, \Gamma)=\{SG+(\mathrm{D}_xG)X \mid (S, X)\in\widetilde{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$$

$$\times\,\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)\}.$$

易见 $\widetilde{T}^u(G, \Gamma)$为 $\varepsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$-模,$T_e^u(G, \Gamma)$一般来说不是 $\varepsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$模,但它是 $\varepsilon_{\lambda,\delta}$-模.

引理 13.6.1 设等变分歧问题 $g\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$满足条件(8),即

$$\dim_{\mathbb{R}}\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)/RT(g, \Gamma)<\infty.$$

假定 $F\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$为 g 的 l-参数 Γ-开折,开折参数 $\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_l)$,又 $q_1,\cdots,q_l\in\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$.那么下面的断语是等价的:

(i) $T_e(g, \Gamma)+\mathbb{R}\{q_1(x, \lambda, 0),\cdots,q_l(x, \lambda, 0)\}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$,

(ii) $T_e^u(F, \Gamma)+\varepsilon_\delta\{q_1,\cdots,q_l\}=\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$.

证 将 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$中的成员限制在 $\delta=0$ 上,由(ii)可导出(i).下证(i)⇒(ii).为简单起见,就单参数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 讨论之,此时 $T_e(g, \Gamma)=\widetilde{T}(g, \Gamma)+\varepsilon_\lambda\{g_\lambda\}$, $T_e^u(F, \Gamma)=\widetilde{T}^u(F, \Gamma)+\varepsilon_{\lambda,\delta}\{F_\lambda\}$.令

$$N = \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)/\widetilde{T}^u(F, \Gamma), \ N_0 = N/\mathcal{M}_\delta \cdot N.$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$, $\widetilde{T}^u(F, \Gamma)$均为 $\epsilon_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$-模,所以 N 及N_0 也是.

由条件(8)可推得存在正整数 s,使得

$$T_e(g, \Gamma) = \widetilde{T}(g, \Gamma) + \mathbb{R}\{g_\lambda, \lambda g_\lambda, \cdots, \lambda^{s-1} g_\lambda\}.$$

取 $n_1 = q_1, \cdots, n_l = q_l$, $n_{l+1} = F_\lambda$, $n_{l+2} = \lambda F_\lambda, \cdots, n_{l+s} = \lambda^{s-1} F_\lambda$, 令 $t = l + s$. 易见每一 $n_i \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)(i = 1, \cdots, t)$. 不失一般性,假设所有 n_i 不在 $\widetilde{T}^u(F, \Gamma)$中. 令 $n_{i,0} = n_i | (\delta = 0)$,下面证明 $n_{i,0}$是 n_i 在N_0 中的投影. 为此,选取 $p_i \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$, 使得 $p_i \equiv n_i \bmod \widetilde{T}^u(F, \Gamma)$. 对 p_i 应用 Taylor 定理,得

$$p_i(x, \lambda, \delta) = p_i(x, \lambda, 0) + \sum_{j=1}^{l} \delta_j h_j(x, \lambda, \delta), \ h_j \in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma),$$

然后将上式两边投影于 N 中,得

$$n_i(x, \lambda, \delta) = n_i(x, \lambda, 0) + \sum_{j=1}^{l} \delta_j \widetilde{h}_j(x, \lambda, \delta),$$

其中 $\widetilde{h}_j$ 是h_j 在N 中投影. 由此可见 $n_{i,0}$是 n_i 在N_0 中的投影 n'_i,并且(i)可改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda;y}(\Gamma) = \widetilde{T}(g, \Gamma) + \mathbb{R}\{n'_1, \cdots, n'_t\}, \tag{11}$$

这是因为 $\lambda^j F_\lambda(x, \lambda, 0) = \lambda^j g_\lambda(x, \lambda)(j = 0, 1, \cdots, s-1)$. 于是由(11)式可导出

$$N_0 = \mathbb{R}\{n'_1, \cdots, n'_t\}.$$

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$是有限生成的 $\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$-模,所以 N 也是. 据推论 13.3.3,

$$N = \varepsilon_\delta\{n_1, \cdots, n_t\},$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma) &= \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + N \\ &= \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l, F_\lambda, \lambda F_\lambda, \cdots, \lambda^{s-1}F_\lambda\} \\ &\subset \widetilde{T}^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\} + \varepsilon_{\lambda,\delta}\{F_\lambda\} \\ &= T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\},\end{aligned}$$

又显然有 $T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\{q_1, \cdots, q_l\} \subset \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\delta;y}(\Gamma)$,所以(ii)成立.

下面讨论几何引理.

引理 13.6.2 设 $K(x, \lambda, \delta) \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$, $K(0, 0, 0) = 0$, 且 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_l)$. 令 $K_1 \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l-1;m}(\Gamma)$定义为

$$K_1(x, \lambda, \delta_1, \cdots, \delta_{l-1}) = K(x, \lambda, \delta_1, \cdots, \delta_{l-1}, 0).$$

假设存在芽 $S \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l;m}(\Gamma)$, $\xi \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)$, $\eta \in \varepsilon_{\lambda,\delta}^{\times k}$, $\zeta \in \varepsilon_\delta^{\times(l-1)}$,使得对 $x \in (\mathbb{R}^n, 0)$, $\lambda \in (\mathbb{R}^k, 0)$, $\delta \in (\mathbb{R}^l, 0)$,下列方程成立:

$$S(x, \lambda, \delta)K(x, \lambda, \delta) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial x_i} \cdot \xi_i(x, \lambda, \delta) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \cdot \eta_j(\lambda, \delta) + \sum_{q=1}^{l-1} \frac{\partial K}{\partial \delta_q} \cdot \zeta_q(\delta) + \frac{\partial K}{\partial \delta_l} = 0, \quad (12)$$

则存在淹没芽 $C: (\mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^{l-1}, 0)$, 使得 K 和 $C^* K_1$ 是 Γ-同构的.

证 向量场芽

$$\frac{\partial}{\partial \delta_l} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, \lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \eta_j(\lambda, \delta) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \sum_{q=1}^{l-1} \zeta_q(\delta) \frac{\partial}{\partial \delta_q}$$

的轨道是常微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}t} = 1, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \xi_i(x, \lambda, \delta), \ i = 1, \cdots, n, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\lambda_j}{\mathrm{d}t} = \eta_j(\lambda, \delta), \ j = 1, \cdots, k, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\delta_q}{\mathrm{d}t} = \zeta_q(\delta), \ q = 1, \cdots, l-1 \end{cases} \tag{13}$$

的解曲线. 取初始条件如下: 当 $t = 0$ 时, $\delta_l = 0$, $x_i = x_{i,0}(i = 1, \cdots, n)$, $\lambda_j = \lambda_{j,0}(j=1, \cdots, k)$, $\delta_q = \delta_{q,0}(q=1, \cdots, l-1)$. 方程组(13)的经过点 $P_0 = (0, x_{1,0}, \cdots, x_{n,0}, \lambda_{1,0}, \cdots, \lambda_{k,0}, \delta_{1,0}, \cdots, \delta_{l-1,0})$的解曲线 $P(t)$必横截于超平面 $\delta_l = 0$. 由 $\dfrac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}t} = 1$ 和 $\delta_{l,0} = 0$ 得 $\delta_l = t$, 因此将 δ_t 等同于 t.

定义 φ: $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l, (0, 0, 0)) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-1}$ 如下: 将与点$(0,0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 相邻近的点(x, λ, δ)沿所在的积分曲线投影到超平面 $\delta_l = 0$ 上 φ 是C^∞的, 并且可以写成如下形式

$$\varphi(x, \lambda, \delta) = (X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), C(\delta)),$$

其中 $X_{\lambda\delta}(x) = X(x, \lambda, \delta)$, $\Lambda_\delta(\lambda) = \Lambda(\lambda, \delta)$, $X \in \varepsilon_{x,\lambda,\delta}^{\times n}$, $\Lambda \in \varepsilon_{\lambda,\delta}^{\times k}$, $C \in \varepsilon_\delta^{\times(l-1)}$. φ 在点$(0,0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 处的 Jacobi 矩阵$(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)}$具有下列表 13.1 中形式

又 $\varphi \mid \{\delta_l = 0\} = id$, 故 $(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)} = (I_{n+k+l-1} \ *)$, 并且 $\mathrm{rank}(\mathrm{D}\varphi)_{(0,0,0)} = n + k + l - 1$,从而 φ 是淹没芽. 由此推出

1) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_x X_{\lambda\delta})_{(0,0,0)} = n$,因而每一 $X_{\lambda\delta}$是微分同胚芽,

2) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_\lambda \Lambda_\delta)_{(0,0)} = k$,因此每一 Λ_δ是微分同胚芽,

3) $\mathrm{rank}(\mathrm{D}_\delta C)_0 = l - 1$,因而 C 是淹没芽.

表 13.1

	x	λ	$\delta_1 \cdots \delta_l$
x	$(D_x X_{\lambda\delta})_{(0,0,0)}$	*	*
λ	0	$(D_\lambda \Lambda_\delta)_{(0,0)}$	*
δ_1 $\vdots$ δ_{l-1}	0	0	$(D_\delta C)_0$

此外,依据方程组(13)的解的惟一性定理可推出

$$X_{\lambda\delta}(\gamma x) = \gamma X_{\lambda\delta}(x), \ \gamma \in \Gamma,$$

因此 $X \in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k,l}(\Gamma)$.

对于和点$(0,0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 相邻近的点 $P=(x,\lambda,\delta)$,可惟一地选取方程组(13)的解曲线 $P(t)=(x(t),\lambda(t),\delta(t))$ 经过点 P. $P(t)$与超平面 $\delta_l=0$ 相交于点$(x(0),\lambda(0),\delta(0))$.现在考虑非自治的齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -S(x(t),\lambda(t),\delta(t))y, \tag{14}$$

其中 $y \in \mathbb{R}^m$.它的解依赖于初始条件 $y=y_0$ 以及$(x(0),\lambda(0),\delta(0))$,这是因为$(x(t),\lambda(t),\delta(t))$是通过积分方程组(13)得到的.(14)式的解可写成下列形式:

$$y(t) = Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0)).$$

当 t 邻近于 $0 \in \mathbb{R}$, y_0 邻近于 $0 \in \mathbb{R}^m$,$(x(0),\lambda(0),\delta(0))$邻近于$(0,0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 时,$(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0)) \mapsto Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0))$是一个取值于$\mathbb{R}^m$ 的 C^∞映射,并且对固定的 t, $x(0)$, $\lambda(0)$, $\delta(0)$,

$$y_0 \mapsto Y(t,y_0;x(0),\lambda(0),\delta(0))$$

是一个从$(\mathbb{R}^m,0)$到自身的线性同胚(参看文献[15]).特别当 $t=$

0 时，该同胚等于$(\mathbb{R}^m, 0)$上的恒同映射. 将此同胚用 $m \times m$ 矩阵 $S(x(0), \lambda(0), \delta(0), t)$来代替，于是有

$$S(x(0), \lambda(0), \delta(0), t)y = Y(t, y; x(0), \lambda(0), \delta(0)) \tag{15}$$

引理中的假设条件(12)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = -S(x(t), \lambda(t), \delta(t)) \cdot K(x(t), \lambda(t), \delta(t)),$$

这说明 $K(x(t), \lambda(t), \delta(t))$满足方程(14)，因此

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = Y(t, K(x(0), \lambda(0), \delta(0)); x(0), \lambda(0), \delta(0)). \tag{16}$$

令 $\tilde{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_{l-1})$，依 φ 的定义

$$\varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = (x(0), \lambda(0), \tilde{\delta}(0)),$$

代入(16)式，得

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = Y(t, K(\varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)), 0), \varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)), 0).$$

而对于和$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ 的原点相邻近的任意点(x, λ, δ)，有方程组(13)的惟一积分曲线在时间 $t = \delta_l$ 时经过它，所以上式可以写为

$$\begin{aligned} K(x, \lambda, \delta) &= Y(t, K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0), \varphi(x, \lambda, \delta), 0) \\ &= S(\varphi(x, \lambda, \delta), \delta_l)K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0) \text{ (根据(15) 式)}. \end{aligned}$$

记 $S(\varphi(x, \lambda, \delta), \delta_l) = \tilde{S}(x, \lambda, \delta)$，易见 $\tilde{S}(x, \lambda, \delta) \in \tilde{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$，并且

$$K(x, \lambda, \delta)=\widetilde{S}(x, \lambda, \delta)K(X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), C(\delta), 0)$$

$$=\widetilde{S}(x, \lambda, \delta)C^* K_1(X_{\lambda\delta}(x), \Lambda_\delta(\lambda), \delta),$$

从而 K 与 $C^* K_1$ 是 Γ-同构的.

13.6.4 定理 13.6.1 的证明

必要性已证,下面证充分性.

依假设,g 的 r-参数 Γ-开折 G 满足(9)式,需证 G 是 g 的 Γ-通用开折.设 $H\in \varepsilon_{n, k, s; m}(\Gamma)$ 是 g 的 s-参数 Γ-开折,开折参数 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$,我们证明 H 可由 G 导出.为此考虑开折

$$F(x, \lambda, \alpha, \beta) = G(x, \lambda, \alpha) + H(x, \lambda, \beta) - g(x, \lambda),$$

易见 $F\in \varepsilon_{n, k, r+s; m}(\Gamma)$ 为 g 的 $(r+s)$-参数 Γ-开折.

断言:存在淹没芽 $A:(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^s, (0, 0))\to(\mathbb{R}^r, 0)$, 使得 F 和 $A^* G$ 是 Γ-同构的.

倘若断言成立,则存在 $(S, X, \Lambda)\in \widetilde{\varepsilon}_{n, k, r+s; m}(\Gamma)\times \varepsilon_{n, k, r+s}(\Gamma)\times \varepsilon_{\lambda,\alpha,\beta}^{\times k}$,使得

$$F(x, \lambda, \alpha, \beta) = S(x, \lambda, \alpha, \beta)G(X(x, \lambda, \alpha, \beta),$$
$$\Lambda(\lambda, \alpha, \beta), A(\alpha, \beta)).$$

令 $\alpha=0$, 得

$$H(x,\lambda, \beta) = S(x, \lambda, 0, \beta)G(X(x, \lambda, 0, \beta),$$
$$\Lambda(\lambda, 0, \beta), A(0, \beta)),$$

因而 H 可由 G 导出.余下证明断言成立.对 s 使用归纳法,证明存在满足断言的淹没芽 A.

当 $s=0$ 时,$H(x, \lambda, 0)=g(x, \lambda)$, $F(x, \lambda, \alpha, 0)=G(x, \lambda,\alpha)$.令 $A=id$: $(\mathbb{R}^r, 0)\to(\mathbb{R}^r, 0)$,显然 F 与 $(id)^* G=G$ 是 Γ-同构的.假定结论在 $s-1$ 时成立,将 $\mathbb{R}^{s-1}$ 嵌入到 $\mathbb{R}^s$ 中,令 $(\beta_1,\cdots,\beta_{s-1})\mapsto(\beta_1,\cdots,\beta_{s-1}, 0)$. 并令 $F_1(x, \lambda, \alpha, \beta_1,\cdots,$

$\beta_{s-1})=F(x, \lambda, \alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{s-1}, 0)$.依归纳假设,存在淹没芽 B: $(\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^{s-1}, 0)\to(\mathbb{R}^r, 0)$,使得 B^*G 与 F_1 是 Γ-同构的.现证明断言对 s 成立.

令 $\delta=(\alpha, \beta)$, 记 $r+s=l$.因 $\left.\dfrac{\partial F}{\partial\alpha_i}(x, \lambda, \delta)\right|_{\delta=0}=\left.\dfrac{\partial G}{\partial\alpha_i}(x, \lambda, \alpha)\right|_{\alpha=0}(i=1, \cdots, r)$, 故(9)式可改写为

$$\mathcal{E}_{n, k; m}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}(x, \lambda, 0), \cdots, \frac{\partial F}{\partial\alpha_r}(x, \lambda, 0)\right\}.$$

据引理 13.6.1,

$$\mathcal{E}_{n, k, l; m}(\Gamma) = T_e^u(F, \Gamma) + \varepsilon_\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial\alpha_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial\alpha_r}\right\}.$$

而 $F\in\mathcal{E}_{n, k, l; m}(\Gamma)$,故 $-\dfrac{\partial F}{\partial\delta_l}=-\dfrac{\partial F}{\partial\beta_s}\in\mathcal{E}_{n, k, l; m}(\Gamma)$.由上式可知,存在 $S\in\tilde{\varepsilon}_{n, k, l; m}(\Gamma)$, $X=(X_1, \cdots, X_n)\in\mathcal{E}_{n, k, l}(\Gamma)$, $\Lambda=(\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k)\in\varepsilon_{\lambda, \delta}^{\times k}$, $\zeta=(\zeta_1, \cdots, \zeta_l)=(\zeta_1, \cdots, \zeta_r, \underbrace{0, \cdots, 0}_{s-1})\in\varepsilon_\delta^{\times(l-1)}$,使得

$$-\frac{\partial F}{\partial\delta_l} = S(x, \lambda, \delta)F(x, \lambda, \delta) + \sum_{i=1}^{n}X_i(x, \lambda, \delta)\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k}\Lambda_j(\lambda, \delta)\frac{\partial F}{\partial\lambda_j} + \sum_{q=1}^{l-1}\zeta_q(\delta)\frac{\partial F}{\partial\delta_q},$$

据引理 13.6.2,存在淹没芽 $C:(\mathbb{R}^l, 0)\to(\mathbb{R}^{l-1}, 0)$, 使得 F 与 C^*F_1 是 Γ-同构的.然后令 $A=B\circ C$,那么 F 与 A^*G 必 Γ-同构,断言成立,依据前面的分析,充分性得证.

值得指出的是,对于单参数 Γ-等变分歧问题 g: $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, 0)\to(\mathbb{R}^n, 0)$, Damon 曾经证明: $RT(g, \Gamma)$ 具有有限余维当且仅当 $T_e(g, \Gamma)$ 具有有限余维(参看文献[31],命题 XV,2.3),因此在这种情形下,Γ-等变通用定理可叙述为

定理 13.6.2 设紧致 Lie 群 Γ 线性地作用在$\mathbb{R}^n$ 上，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma)$ 为含有一个分歧参数的等变分歧问题. 那么 g 的 r-参数 Γ-开折 $G\in \boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma)$为通用开折当且仅当

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{x,\lambda}(\Gamma) = T_e(g, \Gamma) + \mathbb{R}\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha=0}, \cdots, \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha_r}\right|_{\alpha=0}\right\}.$$

(见文献[31]，定理 XV,2.1).

现在问：对于含有多个分歧参数的等变分歧问题，即使它的状态空间与靶空间相同，Damon 的上述论断是否成立呢？

最后简单讨论万有开折的惟一性.

命题 13.6.1 $g(x, \lambda)$的两个 Γ-通用开折 $G(x, \lambda, \alpha)$和 $H(x, \lambda, \beta)$是 Γ-同构的充要条件是它们具有相同数目的开折参数.

证明留作练习.

由此可见，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的任意两个万有开折是 Γ-同构的. 换句话说，在 Γ-同构意义下，$g\in \boldsymbol{\varepsilon}_{n,k;m}(\Gamma)$的万有开折是惟一的.

附录 A Mather 的一条重要引理

本附录证明引理 10.5.1 及推论 10.5.1. 在文献[11]中,该引理称之为 Mather 引理. 我们将按照 Mather 的方法写出证明(见文献[49]).

引理 10.5.1 设 G 为 Lie 群, M 为 C^∞ 流形, α: $G\times M\to M$ 是一个 C^∞ 群作用,又假设 V 是 M 的 C^∞ 连通子流形. 那么 V 包含在 α 的一条轨道中的必要充分条件是

(a) 对于所有 $v\in V, T_v(G\cdot v)\supset T_vV$,

(b) $\dim T_v(G\cdot v)$ 不依赖于 $v\in V$ 的选取.

证 必要性显然,现证充分性.

对每一 $v\in M$,定义映射 α_v: $G\to M$ 为 $\alpha_v(g)=\alpha(g, v)$. 将 G 在单位元 e 处的切空间记为 T_eG. 由 $T\alpha_v(T_eG)=T_v(G\cdot v)$ 可知,条件(a)、(b)等价于

(a′) 对于所有 $v\in V, T\alpha_v(T_eG)\supset T_vV$,

(b′) $\dim T\alpha_v(T_eG)$ 不依赖于 $v\in V$ 的选取.

赋予 T_eG 以 Hilbert 范数. 对每一 $v\in V$,令 L_v 为 $\mathrm{Ker}(T\alpha_v$: $T_eG\to T_vV)$ 在 T_eG 中的正交补,令 $L=\bigcup_{v\in V}(v\times L_v)$. 据(b′), L 是 V 上的向量丛,且为 $V\times T_eG$ 的子丛. 令

$$L_0=\bigcup_{v\in V}((T\alpha_v)^{-1}(T_vV)\cap L_v),$$

据(a′), L_0 是 V 上的向量丛,且为 L 的子丛,并且映射 $\bigcup_{v\in V}(T\alpha_v)$: $L_0\to TV$ 是 C^∞ 向量丛之间的同构,设 β: $TV\to L_0$ 为该映射的逆. 记 π: $V\times T_eG\to T_eG$ 为投射,则 $\pi\circ\beta$: $TV\to T_eG$ 为 C^∞ 映射,且

$$T\alpha_v(\pi\circ\beta(\eta))=\eta,\qquad 对任意\ \eta\in T_vV. \tag{1}$$

为了证明 V 包含在 α 的单独一条轨道中，只需证明 V 中的任意两点 v_1 和 v_2 位于同一条轨道中．因为 V 是连通的，必存在 V 中的光滑曲线 γ 以 v_1 和 v_2 为其端点，即存在 C^∞ 映射 $\gamma:[0, 1]\to V$，使得 $\gamma(0)=v_1$，$\gamma(1)=v_2$．因此只需证明：对于任意 $t_0\in[0, 1]$，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时，$\gamma(t)$和 $\gamma(t_0)$ 位于同一轨道中．

记 $\gamma(t)$关于 t 的导数为$\gamma'(t)$，则 $\gamma'(t)\in T_{\gamma(t)}V$．令

$$X(t)=\pi\circ\beta(\gamma'(t))\in T_eG,$$

显然 $X(t)$是 t 的C^∞ 函数，并且依(1)式，有

$$T\alpha_{\gamma(t)}(X(t))=\gamma'(t). \tag{2}$$

由常微分方程存在性定理知，存在 G 中光滑曲线μ：$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\to G$(对于适当的 $\varepsilon>0$)，使得 $\mu(t_0)=e$，并且

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}=\widetilde{X}_t(\mu(t)), \tag{3}$$

其中 $\widetilde{X}_t$ 是由 $X(t)$扩张到 G 上的惟一右不变向量场．

为证本引理，只需证明：当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时，$\mu(t)^{-1}\gamma(t)=\gamma(t_0)$．因为由它可推出对于该范围内的所有 t，$\gamma(t)$与 $\gamma(t_0)$位于同一轨道中．为此将 $\mu(t)^{-1}\gamma(t)$对 t 求导，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1}\gamma(t))&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1})\gamma(t)+\mu(t)^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\\&=\mu(t)^{-1}\left(-\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}\mu(t)^{-1}\gamma(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\right),\end{aligned}$$

据(3)式以及 $\widetilde{X}_t$ 是右不变的，括号内的式子变为

$$-X(t)\gamma(t)+\gamma'(t),$$

据(2)式，它等于 0，于是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu(t)^{-1}\gamma(t))=0$．而 $\mu(t_0)=e$，这说

明当 $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$ 时,$\mu(t)^{-1}\gamma(t)=\gamma(t_0)$.证毕.

推论 10.5.1 设 M,M'为G-空间,π: $M\to M'$为G-淹没,$V=\pi^{-1}(x')$,$x'\in M'$.假定 V 是连通的,那么 V 包含在G 的一条轨道中的必要充分条件是引理 10.5.1 中的条件(a)被满足.

证 因 π 是淹没,故 V 是M 的C^∞子流形,因而引理 10.5.1 中条件(a)有意义。必要性显然成立.

另一方面,引理 10.5.1 中条件(a)可导出

$$\dim T_v(G\cdot v)=\dim T_vV+\dim T_{x'}(G\cdot x'),\quad \forall v\in V,$$

等式右边显然与 $v\in V$ 的选取无关,因而满足条件(b),充分性成立.

附录 B　Hilbert 基定理

本附录给出 Hilbert 基定理的证明，以供查阅. 设 R 为交换环，以 x 为不定元、系数取自 R 的多项式

$$r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0,$$

所成之集记为 $R[x]$，按照多项式的加法与乘法运算作成一个交换环.

定理 13.2.2　设交换环 R 中的理想均为有限生成的，则环 $R[x]$ 的每一个理想也是有限生成的.

证明之前，先作如下分析. 设 $f(x) \in R[x]$ 为 m 次多项式，$f(x) = r_m x^m + r_{m-1} x^{m-1} + \cdots + r_0$，$r_m \neq 0$. 将 f 的首项系数 r_m 记为 $\hat{f}$，特别 $\hat{0} = 0$.

假定 $\mathscr{I}$ 为 $R[x]$ 中理想. 为使用定理条件. 自然考虑

$$\hat{\mathscr{I}} = \{\hat{f} \in R \mid f \in \mathscr{I}\}.$$

若能证明 $\hat{\mathscr{I}}$ 是 R 的理想，则必为有限生成的，设生成元为 $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_s$. 令

$$k = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \deg p_i.$$

其次，将 $\mathscr{I}$ 中次数不大于 k 的多项式收集在一起，令

$$\mathscr{I}_k = \{f \in \mathscr{I} \mid \deg f \leqslant k\},$$

显然它是一个 R-模. 若能证明 $\mathscr{I}_k$ 是有限生成的，记它的生成元为 $q_1, \cdots, q_t$，余下证明

$$\{p_1, \cdots, p_s,\ q_1, \cdots, q_t\}$$

为 $\mathscr{I}$ 的一组生成元. 现将以上分析中的两点表示为引理的形式.

引理 1 设 R 为交换环, $\mathscr{I}$ 为 $R[x]$ 中理想, 则 $\hat{\mathscr{I}} = \{\hat{f} \in R \mid f \in \mathscr{I}\}$ 为 R 中理想.

证 需证: (a) 若 $f_1, f_2 \in \mathscr{I}$, 则 $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathscr{I}}$ 及 (b) 若 $r \in R$, $f \in \mathscr{I}$, 则 $r\hat{f} \in \hat{\mathscr{I}}$.

对于 (a), 不妨设 $d_1 = \deg f_1 \leqslant \deg f_2 = d_2$. 令 $f = x^{d_2 - d_1} f_1 + f_2$. 因 $\mathscr{I}$ 是理想, $f \in \mathscr{I}$, 且 $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \in \hat{\mathscr{I}}$. (b) 显然成立, 因 $\widehat{(rf)} = r\hat{f}$.

引理 2 设交换环 R 中的所有理想都是有限生成的, 则对 $R[x]$ 中的理想 $\mathscr{I}$ 以及每一 k,

$$\mathscr{I}_k = \{f \in \mathscr{I} \mid \deg f \leqslant k\}$$

是有限生成的 R-模.

证 利用归纳法. 当 $k = 0$ 时, 易见 $\mathscr{I}_0$ 为 R 中理想, 因而作为 R-模是有限生成的. 现归纳假设 $\mathscr{I}_{k-1}$ 是有限生成的 R-模, 生成元为 $f_1, \cdots, f_s$. 对于 $\mathscr{I}_k$, 由引理 1 证明知, $\hat{\mathscr{I}}_k$ 为 R 中理想, 因而是有限生成的, 设生成元为 $\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_t$. 不妨假定 $\deg g_i = k$ $(i = 1, \cdots, t)$ (若不然, 将 g_i 用 $x^{k - \deg g_i} g_i$ 代替). 下面证明 $\{f_1, \cdots, f_s, g_1, \cdots, g_t\}$ 是 R-模 $\mathscr{I}_k$ 的一组生成元.

任取 $g \in \mathscr{I}_k$, 则 g 可写为

$$g(x) = r_k x^k + r_{k-1} x^{k-1} + \cdots + r_0,\ r_0, r_1, \cdots, r_k \in R.$$

(i) 若 $r_k = 0$, 则 $g \in \mathscr{I}_{k-1}$. 依归纳假设, g 可表示为 $f_1, \cdots, f_s$ 的 R-线性组合.

(ii) 若 $r_k \neq 0$, 依定义, $r_k \in \hat{\mathscr{I}}_k$, 因而有

$$r_k = a_1 \hat{g}_1 + \cdots + a_t \hat{g}_t,\ a_1, \cdots, a_t \in R.$$

此时 $\tilde{g}=g-(a_1g_1+\cdots+a_tg_t)$的首项系数为 0(注意每一 $\deg g_i=k$)，故 $\tilde{g}\in\mathscr{I}_{k-1}$,它可表示为诸 f_j 的R-线性组合,从而 $g=\hat{g}+a_1g_1+\cdots+a_tg_t$ 为$f_1,\cdots,f_s$ 及$g_1,\cdots,g_t$ 的R-线性组合.这证明了$\{f_1,\cdots,f_s, g_1,\cdots,g_t\}$是 R-模 $\mathscr{I}_k$ 的一组生成元.

定理 13.2.2 的证 设 $\mathscr{I}$为 $R[x]$中的理想,需证 $\mathscr{I}$是有限生成的.由引理 1,$\hat{\mathscr{I}}$是 R 中理想,因而是有限生成的,设生成元为 $\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_s$.令

$$k=\max_{1\leqslant i\leqslant s}\deg p_i.$$

据引理 2,$\mathscr{I}_k$ 为有限生成的 R-模,设生成元为 $q_1,\cdots,q_t$.下证$\{p_1,\cdots,p_s, q_1,\cdots,q_t\}$为 $\mathscr{I}$的一组生成元.为此需证:对任意 $f\in\mathscr{I}$,存在 $a_1,\cdots,a_s, b_1,\cdots,b_t\in R[x]$,使得

$$f=a_1p_1+\cdots+a_sp_s+b_1q_1+\cdots+b_tq_t. \tag{1}$$

当 $\deg f\leqslant k$ 时,由引理 2 知(1)式成立.为证明(1)式在一般情形下成立,我们对 f 的次数 $\deg f$ 进行归纳证明.

假定对于 $l\geqslant 0$,当 $\deg f\leqslant k+l$ 时,(1)式成立.现假设 f 的次数为 $k+l+1$.这时 f 的首项系数 $\hat{f}$ 可写为

$$\hat{f}=r_1\hat{f}_1+\cdots+r_s\hat{f}_s,\ r_1,\cdots,r_s\in R,$$

这是因为诸 $\hat{p}_i$ 生成 $\hat{\mathscr{I}}$.令

$$g=f-\sum_{j=1}^{s}r_jx^{k+l+1-\deg p_j}p_j,$$

易见 $\deg g\leqslant k+l$.依归纳假设,g 具有形式(1),因而 f 也可写为形式(1).

参 考 文 献

[1] Arnold V I. Singularities of smooth mappings. Russian Math Surveys, 1968, 23(1): 1～43

[2] Arnold V I. Catastrophe Theory. New York: Springer-Verlag, 1984(中译本:陈军译.突变理论,北京:商务印书馆,1992)

[3] Alperin J L. Bell R B. Groups and Representations. New York: Springer-Verlag. 1995

[4] Atiyah M F, Mac Donald I G. Introduction to Commutative Algebra. Reading Mass: Addison-Wesley Publ Company, 1969(中译本:冯绪宁等译.交换代数导引.北京:科学出版社,1982)

[5] Arnold V I, Gusein-Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps, Vol I. Boston: Birkhäuser, 1985

[6] Boardman J M. Singularities of differentiable maps. Publ Math IHEM S, 1967, 33: 21～57

[7] Borel A. Linear Algebraic Groups. New York: Benjamin, 1969

[8] Bröcker Th, Jänich K. Introduction to Differential Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[9] Bröcker Th, Lander L. Differentiable Germs and Catastrophes. Cambridge: Cambridge University Press, 1975

[10] Bröcker Th, tom Dieck T. Representations of Compact Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1985

[11] Bruce J W, du Plessis A A, Wall C T C. Determinacy and unipotency. Invent Math, 1987, 88: 512～554

[12] 曹义.映射芽的 V_q 决定性.数学学报,1991,34(2):234～241

[13] 陈仲沪.Lie 群导引.北京:高等教育出版社,1997

[14] Damon J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathscr{A}$ *and* $\mathscr{K}$. Memoirs AMS, 1984, 306: 1－88

[15] Dieudonné J. Foundations of Modern Analysis. New York: Academic Press, 1969

[16] du Plessis A A. On the determinacy of smooth map-germs, Invent Math, 1980, 58: 107～160

[17] 冯克勤.交换代数基础.北京:高等教育出版社,1985

[18] Gaffney T. On the order of determination of a finitely determined germ. Invent Math, 1976, 37:83~92

[19] Gaffney T. A note on the order of determination of a finitely determined germ. Invent Math, 1979, 52:127~135

[20] Gaffney T. New methods in the classification theory of bifurcation problems. Contemporary Mathematics, 1986, 56:97~116

[21] Gaffney T, du Plessis A A. More on the determinacy of smooth map-germs. Invent Math, 1982, 66:137~163

[22] Gervais J J. Sufficiency of jets. Pacific J Math, 1977, 77(2):419~422

[23] Gibson C G. Singular Points of Smooth Mappings. Research Notes in Mathematics 25. London: Pitman, 1979

[24] Glaeser G. Functions composées differentiables. Ann of Math, 1963, 77: 193~209

[25] Godwin A N. Three dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic. Publ Math IHES, 1971, 40:117~138

[26] Golubitsky M, Guckenheimer J. Multiparameter Bifurcation Theory. Contemporary Mathematics 56. Providence: AMS, 1986

[27] Golubitsky M, Guillemin V. Stable Mappings and Their singularities. New York: Springer-Verlag, 1973

[28] Golubitsky M, Schaeffer D G. A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. Commun Pure Appl Math, 1979, 32:21~98

[29] Golubitsky M, Schaeffer D G. Imperfect bifurcation in the presence of symmetry. Commun Math Phys, 1979, 67: 205~232

[30] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol I. New York: Springer-Verlag, 1985

[31] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol II. New York: Springer-Verlag, 1988

[32] Hilbert D. Gesammelte abhandlungen, Vol 2. Berlin: Springer, 1932~1935

[33] Hirsch M. Differential Topology. New York: Springer-Verlag, 1976

[34] Hochschild G P. Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras. New York: Springer-Verlag, 1981

[35] Hunt B R, Sauer T, Yorke J A. Prevalence: a translation-invariant "almost

every"on infinite-dimensional spaces. Bull Amer Math Soc, 1992, 27(2): 217～238
[36] Keyfitz B L. Classification of one state variable bifurcation problems up to codimension seven. Dyn Stab Sys, 1986, 1:1～142
[37] Kucharz W. A characterization of C^∞-sufficient k-jets. Proc Amer Math Soc, 1976, 55:419～424
[38] Levine H I. Singularities of differentiable mappings. In: Proc Liverpoor Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 1～89. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971
[39] Li Yangcheng. On the estimates of the order of finitely A_k-determined map-germs. Acta Mathematica Sinica (new series), 1988, 4(1):28～38
[40] Li Yangcheng. $\mathscr{G}_{q,k}$-determinacy of C^∞ map-germs. Chinese Science Bulletin, 1993, 38(1):6～9
[41] Li Yangcheng. The recognition of equivariant bifurcation problems. Science in China, series A, 1996, 39(6):604～612
[42] 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海:上海科技教育出版社, 1995
[43] 李养成, 邹建成. 带有多个分歧参数的等变分歧问题的万有开折. 数学学报, 1999, 42(6):1071～1076
[44] Malgrange B. Ideals of Differentiable Functions. London: Oxford University Press, 1966
[45] Martinet J. Singularities of Smooth Functions and Maps. Cambridge: Cambridge University Press, 1982
[46] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, I: The division theorem. Ann of Math, 1968, 87(1): 89～104
[47] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, II: Infinitesimal stability implies stability. Ann of Math, 1969, 89(2): 254～291
[48] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map germs. Publ Math IHES, 1969, 35: 127～156
[49] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, IV: Classification of stable germs by $\mathbb{R}$-algebras. Publ Math IHES, 1970, 37: 223～248
[50] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, V: Transversality. Advances in Mathematics, 1970, 4: 301～336
[51] Mather J N. Stability of C^∞ mappings, VI: The nice dimensions. Lec-

ture Notes in Mathematics, 1971, 192: 207～253
[52] Mather J N. On Thom-Boardman singularities. International Symposium in Dynamical Systems. Peixoto ed. New York: Academic Press, 1973, 233～248
[53] Mather J N. Differentiable invariants. Topology, 1977, 16:145～155
[54] Melbourne I. The recognition problem for eguivariant singularities. Nonlinearity, 1988, 1: 215～240
[55] Milnor J. Differential topology, Lecture notes, Princeton, 1958(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)
[56] Minor J. Topology from the differentiable viewpoint, University of Virginia Press, 1965(中译本:熊金城译.从微分观点看拓扑.上海:上海科学技术出版社,1983)
[57] Milnor J. Morse Theory. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963(中译本:江嘉禾译.莫尔斯理论.北京:科学出版社,1988)
[58] Morin B. Formes canoniques des singularitiés dúne application differentiable. Comptes Rendus Acad Sci, 1965, 260: 5662～5665, 6503～6506
[59] Nirenberg L. A proof of the Malgrange preparation theorem. In Proc Liverpoor Singularities Symposium I, LNM, Vol 192, 97～105 Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1971.
[60] Poénaru V. Singularités C^{∞} en présence de symétrie. Lecture Notes in Mathematics Vol 510. Berlin: Springer-Verlag, 1976
[61] Sattinger D H. Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory. Lecture Notes in Mathematics Vol 762, Berlin: Springer-Verlag, 1979
[62] Schwarz G W. Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group. Topology, 1975, 14: 63～68
[63] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. New Jersey: Prentice-Hall, 1964
[64] 唐云.对称性分岔理论基础.北京:科学出版社,1998
[65] Wall C T C. Finite determinacy of smooth map-germs. Bull London Math, Soc, 1981, 13: 481～539
[66] Warner F W. Foundations of Differentiabe Manifolds and Lie Groups. New York: Springer-Verlag, 1983
[67] Weyl H. David Hilbert and his mathematical work. Bull AMS, 1944,

50: 612～654

[68] Whitney H. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans Amer Math Soc, 1934, 36(1): 63～89

[69] Whitney H. Differentiable even functions, Duke J Math, 1943, 10: 159～160

[70] Whitney H. On singularities of mappings of Euclidean spaces I: Mappings of the plane into the plane. Ann of Math, 1955, 62: 374～410

[71] Wilson L C. Map-germs infinitely determined with respect to right-left eguivalence. Pacific J Math, 1982, 102: 235～245

[72] 项武义,侯自新,孟道骥.李群讲义.北京:北京大学出版社,1992

[73] 张国滨.光滑映射芽的有限决定性(II):M-A_k-决定.数学学报,1990, 33(1):34～42

[74] 张国滨.光滑映射芽的有限决定性(III):M-R_k-决定.数学学报,1991, 34(1):112～117

[75] 张筑生.微分拓扑讲义.北京:北京大学出版社,1996

[76] Zou Jiancheng. Finite determination and universal unfoldings of bifurcation problems. Acta Mathematica Sinica(new series), 1998, 14: 663～674

索　　引

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

---

① 右边数字(×·×)表示它们在正文中初次出现的章节.

六　　画

七　　画

八　　画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画

十六画

其他